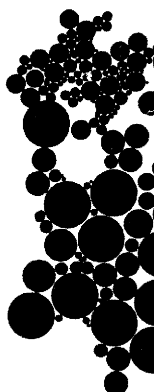
FACULTEIT TECHNISCHE NATUURWETENSCHAPPEN



ALGEMENE PRACTICUMHANDLEIDING

J. VAN DER MEULEN
B. M. TEL
P. P. VEUGELERS
H. K. HEMMES
J. W. J. VERSCHUUR

AUGUSTUS 2009
VAKCODE: 140580
OPLAGE: 170
PRIJS: €12,50

734

UNIVERSITEIT TWENTE.

Algemene Practicumhandleiding

Voor de opleidingen
Advanced Technology,
Scheikundige Technologie
en Technische Natuurkunde
van de Universiteit Twente

J. van der Meulen
B.M.Tel
P.P. Veugelers
H.K. Hemmes
J.W.J Verschuur

Juni 2009

Voorwoord

Bij diverse practica bij Advanced Technology, Scheikundige Technologie en Technische Natuurkunde wordt gebruik gemaakt van practicumhandleidingen. Een handleiding kan bijvoorbeeld practicumopdrachten, theorie of informatie over apparatuur of de practicumorganisatie bevatten.
Voor de practica *Experimenteren 1*, *Experimenteren 2* en *Laboratory Practice 1* is gekozen voor een opzet waarbij de meer algemene stukken informatie zijn opgenomen in deze Algemene Practicumhandleiding (de 'APH') en waarbij de practicumopdrachten, specifieke regels en organisatie e.d. te vinden zijn op Blackboard. Er is bovendien nog een aparte handleiding voor de Matlab instructie, die onderdeel is van de bovengenoemde practica.

In deze Algemene Practicumhandleiding vind je bijvoorbeeld:

- Arbo en Milieu, waaronder omgaan met chemisch afval
- Experimenteren in de natuurwetenschappen
- Meten
- Verslaggeving (journaal, verslag)
- Bibliotheekgebruik
- Foutenleer
- Diverse technieken en apparatuur uit de natuurkunde en de chemie.

In deze handleiding wordt bewust niet erg uitgebreid ingegaan op het veilig werken in het laboratorium. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van het boek 'Veiligheid in het laboratorium', dat bij de practica *Experimenteren 1* en *Laboratory Practice 1* moet worden aangeschaft.

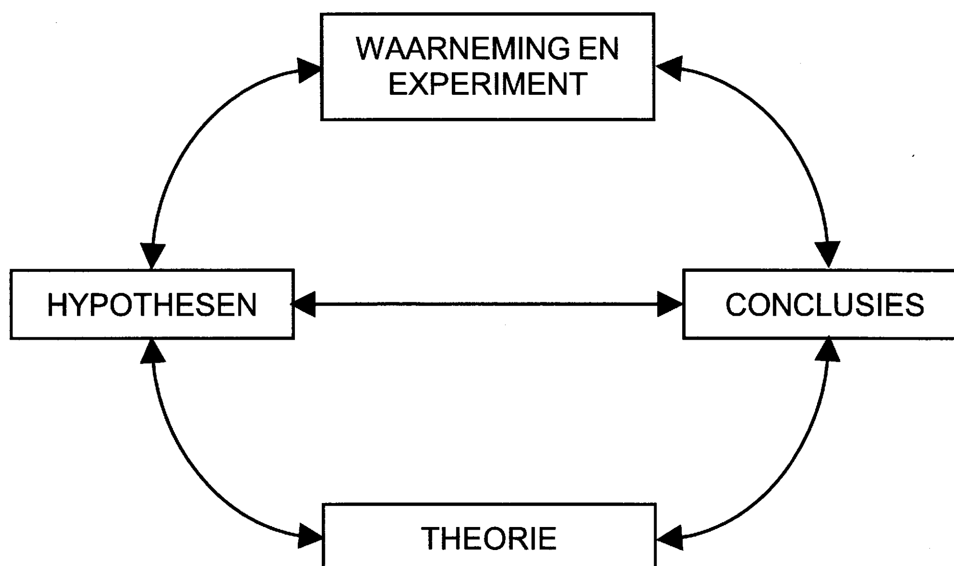
Jelle van der Meulen
Brigitte Tel
Pepe Veugelers
Herman Hemmes
Jeroen Verschuur

Inhoudsopgave

1 Inleiding bij de practica

1.1 Experimenteren in de natuurwetenschappen

Experimenteren heeft in de ontwikkeling van de natuurwetenschappen een wezenlijke rol gespeeld. Experimenten moesten worden bedacht en uitgevoerd om allerlei grootheden (lichtsnelheid, e/m, getal van Avogadro, atoomgewichten enz.) met een steeds grotere nauwkeurigheid te bepalen. Ook bij het ontwikkelen van het hele stelsel van theorieën, waaruit de natuurwetenschappen zijn opgebouwd spraken de resultaten van zorgvuldig experimenteel onderzoek steeds het (voorlopig) laatste woord. Dat experimenten bij de ontwikkeling van een wetenschap zo'n cruciale rol spelen vinden we niet alleen bij natuurkunde, scheikunde en biologie, maar ook bij bepaalde benaderingen in de psychologie, sociologie en onderwijskunde. Al die wetenschappen samen noemen we de 'empirische wetenschappen' (in de Angelsaksische literatuur spreekt men over 'sciences'). In het kort kan men de ontwikkeling en uitbouw van al deze wetenschappen omschrijven m.b.v. een aantal steeds op elkaar volgende stappen: de 'empirische cyclus'. We zullen dit aan de hand van een eenvoudig voorbeeld illustreren:



Figuur 1. Empirische Cyclus

Voorbeeld

We gaan er even van uit dat we helemaal niets van natuurkunde weten en een bak met water aantreffen waarin zich een houten bal, een rubber bal en een kubusvormig stukje aluminium bevinden. We zien dan dat de houten en de rubber bal drijven terwijl het blokje aluminium op de bodem ligt. *We nemen dus een aantal verschijnselen waar.*

Dit is de eerste fase van de cyclus. De ontwikkeling van een wetenschap begint dan met de behoefte om die waargenomen verschijnselen te verklaren en in een logisch verband met elkaar te brengen. We gaan dus zoeken naar een principe waaraan de waargenomen verschijnselen voldoen en waarmee we de aard van nieuwe verschijnselen kunnen voorspellen.

De waarnemingen zijn erg belangrijk. Waarnemer A geeft bijvoorbeeld de volgende beschrijving: 'een houten voorwerp en een bal drijven, een metaalachtig voorwerp ligt op de bodem'. Waarnemer B beschrijft de situatie als volgt: 'twee ronde voorwerpen drijven en een blokje ligt op de bodem'. In dit geval zou waarnemer B als principe kunnen formuleren: 'bolvormige voorwerpen drijven en kubusvormige voorwerpen zinken', terwijl waarnemer A nog geen

principe kan ontdekken. Waarnemer B heeft een *hypothese geformuleerd.* Een van de kenmerken voor zo'n hypothese is, dat er meer in wordt beweerd, dan wat we tot nu toe feitelijk hebben waargenomen. In dit geval hebben we de houten en de rubber bol uitgebreid tot alles wat een bolvorm heeft en het aluminium blokje tot alles wat een kubusvorm heeft.
Om na te gaan of de hypothese juist is, zullen we nieuwe waarnemingen moeten doen: we moeten *een experiment ontwerpen om de hypothese te toetsen.* We gooien daarom in de bak met water nog een kurken bol en een kubusvormige steen en zien, dat de bol inderdaad blijft drijven en dat de steen zinkt. Dit experiment geeft dus geen aanleiding om de hypothese te verwerpen, en we *trekken de voorlopige(!) conclusie* dat onze hypothese juist was. We voeren echter nog een experiment uit door een aluminium bol in het water te werpen en we zien dat de bol zinkt. Op grond hiervan moeten we onze oorspronkelijke *hypothese verwerpen* en een *nieuwe hypothese opstellen,* die door geen van de tot nu toe gedane waarnemingen wordt tegengesproken. Op grond van deze nieuwe hypothese ontwerpen we weer een experiment om de hypothese te toetsen, voeren dat uit, trekken weer een conclusie, etc.

Aan dit voorbeeld zien we hoe er bij het ontwikkelen van een natuurwetenschappelijke theorie een voortdurende opeenvolging ontstaat van hypothese, waarnemingen en experimenten, herziene hypothesen, nieuwe experimenten, etc. Vandaar de naam empirische cyclus. Als we een hypothese op grond van vele experimenten, waarin we allerlei variabelen systematisch gevarieerd hebben, niet kunnen verwerpen, krijgt hij langzamerhand het karakter van een *wet.* Een heel stelsel van wetten en waargenomen relaties tussen verschillende variabelen kunnen we proberen te beschrijven m.b.v. een *model* of *theorie* (bijv. de ionentheorie, het golfmodel). Met zo'n theorie kunnen we nieuwe verschijnselen voorspellen en zolang uit experimenten blijkt, dat de voorspellingen kloppen, kunnen we de theorie handhaven. Wanneer de voorspellingen echter niet kloppen – terwijl ze wel logisch en noodzakelijkerwijs uit de theorie volgden – moeten we onze theorie gaan herzien. Ook van de ontwikkeling en voortdurende aanpassing van zo'n theorie zijn in de natuurwetenschappen talloze voorbeelden te vinden (bijvoorbeeld de ontwikkeling van de atoomtheorie van een hardebollen-model tot de moderne quantumtheorie, de beperking van het geldigheidsgebied van de klassieke mechanica, enz.).

Vanwege de essentiële rol die experimenten spelen bij de theorievorming in de natuurwetenschappen is het belangrijk te leren experimenteren. Daarbij zal aandacht worden besteed aan alle fasen van de empirische cyclus of methode van onderzoek. Een overzicht van de fasering van een onderzoek en de belangrijkste activiteiten in iedere fase is achter in deze handleiding opgenomen.

1.2 Functie van de practica

In vrijwel elke fase van de studie is plaats ingeruimd voor practica. Hoewel de practica en de opdrachten binnen een practicum op het eerste gezicht onderling sterk kunnen verschillen, zijn ze gezamenlijk opgezet vanuit een centraal uitgangspunt: aan het einde van de studie moet je in staat zijn om zelfstandig experimenten te ontwerpen en uit te voeren om een bepaald natuurwetenschappelijk of technologisch probleem op te lossen. Daarnaast moet je als ingenieur vaardigheden hebben op het gebied van schriftelijke en mondelinge communicatie, je moet goed gebruik kunnen maken van de beschikbare literatuur, je moet veilig kunnen werken en je moet verantwoord omgaan met chemisch afval.
We zullen hier in het kort nagaan wat er bij het oplossen van een technologisch of natuurwetenschappelijk probleem zoal komt kijken en telkens aangeven in hoeverre in de practica in

het eerste jaar aan de verschillende aspecten aandacht wordt besteed. Dat zullen we doen aan de hand van de fasen van de empirische cyclus of 'methode van onderzoek'.

Fase A: Analyse van het probleem

Wanneer je met een bepaald probleem wordt geconfronteerd, dat via een experimentele benadering moet worden opgelost, zul je een hoeveelheid vakkennis tot je beschikking moeten hebben en een idee moeten hebben hoe je dergelijke problemen kunt aanpakken. Je zult je eerst een beeld van het probleem proberen te vormen, kijken wat er van belang lijkt en hoe de variabelen met elkaar samenhangen. Als je het probleem zo in kaart gebracht hebt, moet je bepalen of je al genoeg informatie hebt om de oplossing te bereiken, of dat je meer informatie nodig hebt.

Fase B: Informatie

Als je tijdens het oplossen meer informatie nodig hebt, moet je in staat zijn deze informatie te verzamelen. Je zult de relevante gegevens moeten kunnen opzoeken uit de *literatuur* of d.m.v. een *oriënterend experiment.*
In deze APH of bij de practicumopdrachten is de theorie voor de verschillende opdrachten gegeven.

Fase C: Hypothese

Bij veel opdrachten zul je op grond van de gegevens een algemeen principe, een *hypothese* moeten formuleren, om het probleem op te kunnen oplossen. In een hypothese spreek je een verwachting uit, die (indien die juist blijkt) leidt tot de oplossing van het probleem of deelprobleem. *Een hypothese moet zo specifiek mogelijk worden geformuleerd en toetsbaar zijn.*

Fase D: Toetsing (meting, waarnemingen, foutenverwerking)

De principes, veronderstelde relaties enz., die in hypothesen zijn geformuleerd, moeten worden getoetst. (Meestal zal men slechts enkele hypothesen gaan toetsen). De variabelen zullen daartoe eerst in meetbare variabelen moeten worden omgezet, daarna zullen er meetmethoden en meetomstandigheden moeten worden gekozen. Daarbij is het belangrijk na te gaan aan welke nauwkeurigheidseisen je meetresultaten moeten voldoen. Die eisen bepalen vaak welke meetmethoden of meetinstrumenten je moet gebruiken (zie hoofdstuk Foutenleer).

> **Voorbeeld**
> Je verwacht dat de snelheid van een bepaalde chemische reactie kwadratisch evenredig is met [A], de concentratie van een van de reactanten: snelheid $\propto [A]^2$. Je vindt dat de reactiesnelheid toeneemt met een factor $1{,}3 \pm 0{,}2$ als [A] met een factor 1,20 is toegenomen. Conclusie? Je kunt niet zeggen dat het verwachte verband juist is, daarvoor is het verwachte meetresultaat te onnauwkeurig: misschien geldt dat de snelheid $\propto$ [A].

In een meetprogramma of recept wordt op gedetailleerde wijze aangegeven welke variabelen op welke wijze worden gevarieerd en bepaald. Vervolgens moet het experiment daadwerkelijk uitgevoerd worden. Daar is een dosis handvaardigheid voor nodig. Tenslotte moet worden nagegaan hoe nauwkeurig en betrouwbaar de resultaten zijn (bijvoorbeeld: was er nog onverwachte invloed van andere variabelen, bijvoorbeeld de experimentator?). Zie het hoofdstuk Foutenleer.

Fase E: Conclusie

Op basis van de meetresultaten en hun nauwkeurigheid en betrouwbaarheid kan geconcludeerd worden of de hypothese al dan niet verworpen moet worden. Als de hypothese verworpen moet worden, zul je een nieuwe hypothese moeten formuleren en toetsen. Als de hypo-

these bevestigd is, zal het (deel-)probleem meestal zijn opgelost, wat in een eindconclusie zal worden uitgedrukt.

Fase F: Rapportage
Alle ondernomen activiteiten, evenals de eraan ten grondslag liggende argumenten moeten overzichtelijk worden vastgelegd in een journaal. Uit het journaal moet het verloop van het oplossen van het probleem kunnen worden gereconstrueerd. Je zult dus het journaal moeten bijhouden *tijdens het werken aan de opdracht*. De fasering van de methode van onderzoek is dan ook direct terug te vinden in het journaal. Aan de hand van het journaal kun je *ná de opdracht* een verslag schrijven, waarmee aan anderen (buitenstaanders) kan worden gerapporteerd.
Bij *Experimenteren 1* en *Laboratory Practice 1* leer je hoe je een laboratoriumjournaal bijhoudt en gebruikt. Je hoeft nog geen verslagen te schrijven. Bij *Experimenteren 2* schrijf je twee keer een verslag.

1.3 Invulling van de onderzoeksfases

In de vorige paragraaf zijn de verschillende fases van het onderzoek in algemene termen beschreven. Meestal komen bij een experiment niet alle aspecten van de emperische cyclus in dezelfde mate aan de orde. In de praktijk hebben we vaak te maken met een 'deelprobleem'. Hierbij ligt dan de nadruk op een deel van de empirische cyclus.

Als er (nog) niet zoveel theoretisch bekend is van een systeem zal er eerst begonnen worden aan de 'experimentele kant' van het probleem. Van daaruit wordt dan naar inzicht en modelvorming toegewerkt. Het zwaartepunt ligt dan aan de 'waarneming en experiment' kant van de empirische cyclus. (zie figuur 1).

Als er al wel een (kwantitatieve) theorie beschikbaar is begint de analyse met het uitwerken van de theorie naar relaties die experimenteel getoetst kunnen worden. Het zwaartepunt ligt dan aan de 'theorie' kant van de empirische cyclus (zie figuur 1).

Beide varianten worden hieronder verder uitgewerkt.

1.3.1 Modelvorming op basis van experimenten

Als het gedrag van een systeem of proces niet goed begrepen wordt is er ook (nog) geen goede kwantitatieve beschrijving. Een voorbeeld hiervan vindt je terug bij de ontwikkeling van micro-mechanische systemen. Kwalitatief was al wel bekend welke aspecten een rol spelen bij het gedrag van deze systemen, maar ze gedroegen zich echter niet hetzelfde als hun macroscopische tegenhangers. Invloeden als luchtwrijving en demping gedragen zich op micrometer schaal toch anders dan op macroscopische schaal. Ook is hun effect relatief groter. Als je in zo'n geval inzicht wilt krijgen in de (kwantitatieve) wetmatigheden kan je gericht experimenteel onderzoek doen. De empirische cyclus begint dan aan de kant van de 'waarneming en experiment' (zie figuur 1).

Fase A bestaat dan uit een eerste inventarisatie welke processen een rol kunnen spelen en hoe deze beschreven worden. Als de eerste inventarisatie teveel mogelijkheden oplevert kan je in fase B m.b.v. verdere literatuurstudie en eventueel eerste experimenten alvast een schifting maken om de belangrijkste kandidaat voor een goede mogelijke verklaring van het gedrag te identificeren. Een 'kandidaat-theorie' levert ook een kwantitatieve relatie op tussen de belang-

rijke grootheden. In fase C is dan de hypothese dat 'de kwantitatieve relatie van de kandidaat-theorie een goede beschrijving geeft van het gedrag van het systeem'. Deze hypothese ga je in fase D toetsen m.b.v. gerichte experimenten. Op base van deze informatie kan je in fase E dan de conclusie trekken of het systeem wel of niet goed beschreven wordt door de kandidaat-theorie.

1.3.2 Experimentele toetsing van een theorie

Als er al een uitgewerkte theorie van een bepaald proces of systeem voorhanden is die nog niet getest is, bestaat het onderzoek uit het experimenteel toetsen van deze theorie. Omdat er al een theorie is kan in de analyse fase bepaald worden welke kwantitatieve relaties m.b.v. experimenten getoetst gaan worden. Dit type probleem begint in de empirische cyclus aan de kant van de 'theorie' (zie figuur 1).

Fase A bestaat nu uit het analyseren van de theorie en het identificeren van de relaties die experimenteel getoetst gaan worden. Vanuit de theorie kan dan een voorspelling gedaan worden wat er uit de metingen moet komen (als de theorie klopt!). Het kan zijn dat de theorie zo algemeen is dat er wel verbanden beschreven worden, maar dat er voor het gegeven probleem specifieke informatie ontbreekt (materialen, geometrie, etc.) waardoor er geen kwantiatieve voorspelling gedaan kan worden. In dat geval zal je in fase B d.m.v. een oriënterend experiment of nadere analyse hier inzicht in moeten krijgen. De hypothese in fase C is dan natuurlijk dat de theorie klopt en dat de metingen de voorspelde waarden moeten opleveren. In fase D worden de metingen uitgevoerd, geanalyseerd en vergeleken met de voorspelling van de theorie. In fase E wordt de conclusie getrokken of de theorie voldoet. Als de theorie niet voldoet kan de cyclus opnieuw doorlopen worden.

1.4 Experimenteren is hard werken

Uit het bovenstaande verhaal wordt duidelijk dat het experimenteren geen lineair proces is. Hoe complexer een vraag is, hoe meer je zult moeten zoeken en uitproberen. Er worden oplossingen bedacht, keuzes gemaakt, gemeten, gereflecteerd, theorie bekeken of opnieuw gemeten, etc. Belangrijk is daarom dat je niet alleen op uitvoeringsniveau bezig bent maar ook af en toe pas op de plaats maakt. Dat je gevoel krijgt voor wanneer je op het verkeerde spoor zit, dat je weet wanneer je terug moet naar de theoretische concepten of dat het probleem op instrumentatieniveau speelt. Experimenteren vraagt om creativiteit en doorzettingsvermogen. Het niet direct weten van waar het heen moet vraagt een nieuwe aanpak waarbij tactieken als bijvoorbeeld het structureren van het probleem, het opsplitsen in deelproblemen etc. nodig zijn om een stap verder te komen. De praktijk is weerbarstig, experimenteren is hard werken.

Bij de practica wordt in eerste instantie gewerkt met een standaard journaal structuur. De onderdelen van het journaal hangen samen met de verschillende fasen in het onderzoek. Een tekst is per definitie een lineaire weergave en daarmee ook direct te beperkt om het hele proces dat speelt weer te geven. Het omgaan met deze beperktheid vraagt om het langzaam loslaten van een te gedetailleerde structuur en het flexibel omgaan met de volgorde van de verschillende onderdelen. Zie hierover meer in het hoofdstuk over Journaliseren en verslaggeving.

2 Arbo en Milieu

2.1 Inleiding

Bij het begin van het (eerste) practicum krijg je het boekje 'Arbo en Milieu – Basisinformatie voor studenten' uitgereikt. De 'Algemene gedragsregels' daaruit zul je direct moeten bekijken en in je opnemen.
Verder zal tijdens de eerste – inleidende – practicumbijeenkomst de procedure bij een calamiteit worden besproken (staat ook in het genoemde boekje vermeld). Vanaf de eerste practicumbijeenkomst zul je je verder volgens de algemene regels moeten gedragen!

2.2 Gevarenbronnen en veiligheidsmaatregelen

Je kunt niet altijd zomaar beginnen met een experiment. Zie bovengenoemd boekje. Via de practicumhandleiding en de practicumassistent krijg je meer informatie over wat er aan voorbereiding op dit gebied van je wordt verwacht.
Verdere aanwijzingen voor veilig werken vind je in het boek 'Veiligheid in het laboratorium', H. Kramers-Pals en D. van der Meulen, Bohn, Stafleu & Van Loghum, Houten/Diegem, 1999.

2.3 Chemisch Afval

Hoewel de hoeveelheid chemisch afval van de universiteit relatief gering is, blijft het uiteraard erg slecht voor het milieu. Onder chemisch afval verstaan we hier: die afvalstoffen die als zodanig bij wet zijn aangewezen. Hierbij hoeft niet alleen gedacht te worden aan chemicaliën die op laboratoria gebruikt worden maar ook aan bijvoorbeeld afgewerkte olie, TL buizen, batterijen etc. Met name het afval dat op chemische laboratoria vrijkomt levert vaak grote problemen bij verwerking op. Zo bestaat het afval meestal uit veel verschillende componenten, die vaak niet eens bekend zijn. Ook worden er stoffen gebruikt die in ieder geval moeilijk te verwerken zijn zoals broom- en chloorhoudend afval en zware metalen.

Voor het inzamelen en verwerken van het chemisch afval heeft de UT een speciale regeling. Deze regeling geldt voor iedereen die binnen de universiteit chemisch afval produceert.

Om tot een effectieve afvoer en verwerking te komen van het chemisch afval is het onderverdeeld in zes hoofdcategorieën die weer onderverdeeld zijn in subcategorieën. Elke subcategorie moet apart worden ingezameld. Zie verder het eerdergenoemde boekje 'Arbo & Milieu'.
Alle subcategorieën moeten allemaal afzonderlijk worden ingezameld. Hierdoor zullen er op laboratoria waar met veel verschillende chemicaliën wordt gewerkt ook veel verschillende afvalvaatjes staan. Deze vaatjes met een inhoud van 5-25 liter zijn gemaakt van chemisch resistent plastic en zijn er in verschillende kleuren. Ze staan meestal in de labzaal in een zuurkast. Het is van zeer groot belang dat chemisch afval in het juiste vaatje terecht komt. Als dit namelijk niet gebeurt, kunnen er ongewenste reacties optreden en wordt de verwerking bemoeilijkt. Bovendien kunnen er gevaarlijke situaties ontstaan.
Al het chemisch afval van de universiteit wordt centraal verzameld en afgevoerd.

Tijdens het transport van afvalstoffen is de Wet Vervoer Gevaarlijke Stoffen van toepassing. Op grond hiervan moet op de verpakking of verzamelverpakking een of meer gevaarsymbolen worden aangebracht (Zie boek 'Veiligheid in het laboratorium'). Daarnaast is het noodzakelijk, dat per verpakking een duidelijk informatie etiket wordt aangebracht met daarop de volgende gegevens: inhoud, afzender en deskundige dienst. Elke hoofdcategorie heeft zijn eigen direct herkenbare etiket.

ALKALISCHE ANORGANISCHE STOFFEN IN OPLOSSING
II

Subgroep:
Samenstelling en Concentratie:

Naam :
Afdeling:
Tel. : Datum:

Voor informatie: 053-489(4081)
Universiteit Twente
Chemische Afvalstoffen Dienst
Postbus 217 7500 AE Enschede

De verdeling in categorieën is mede gebeurd om verwerkingstechnische redenen. De zure en alkalische anorganische stoffen in oplossing, die gescheiden worden verzameld om reacties te voorkomen waarbij giftige stoffen vrijkomen, worden meestal ingedampt om vervolgens naar een deponie (stortplaats) te worden afgevoerd. Zowel de halogeen-arme als de halogeenrijke organische verbindingen worden verbrand. Voor de bijzondere afvalstoffen en voor de afvalstoffen met een bijzonder risico geldt dat er voor elke subcategorie afzonderlijk moet worden gekeken hoe het afval verwerkt moet worden.

2.4 Praktische zaken

Op een fysische lab is weinig afval:

- Kapotte componenten gaan rechtstreeks in de afvalbak op het practicum en worden verder niet verwerkt.
- Defecte apparatuur wordt door de technici via de materiaaldienst afgevoerd.
- Chemisch afval zoals kwik wordt door de technische staf in een potje met zwavel gedaan en verder verwerkt.

Op een chemische lab merk je meer van de 'regeling chemisch afval'. Op het chemisch practicum zal een 'zaalchef' ervoor gezorgd hebben dat er op het lab de juiste afvalvaatjes aanwezig zijn. Als dit niet het geval is, ben je volgens het Arbo- & Milieureglement ST verplicht om hierin verandering te brengen. Dit zal in de praktijk in overleg gaan met de zaalchef. Hoewel het vaak om kleine hoeveelheden gaat moet er bewust omgesprongen worden met het afval. Zorg dus dat je geen overbodig afval produceert en dat al het afval in het juiste vaatje terecht komt. Dit geldt bijvoorbeeld ook voor spoelaceton. Als je eraan twijfelt in welk vaatje je het afval moet doen raadpleeg dan je practicumassistent of de zaalchef.
Bij de eerstejaarspractica in Langezijds hangt altijd een overzicht op de zuurkast met de afvalvaatjes, waarop je kunt aflezen welke stof in welk vaatje moet.

3 Meten

3.1 Inleiding

De inhoud van dit hoofdstuk is gebaseerd op hoofdstuk 2 uit het proefschrift "Meten: Normen en waarden", Martin Goedhart, Rijksuniversiteit Utrecht, januari 1990.
Literatuur: Brakel, J. van & J.T. van den Brink (1988), Filosofie van de wetenschappen, Coutinho, Muiderberg.

3.2 Een omschrijving van 'meten'

Hoewel meten voor wetenschappers een dagelijkse bezigheid is, is het niet eenvoudig een omschrijving van 'meten' te geven. Een omschrijving van Van Brakel en Van den Brink:

'Meten is het toekennen van getallen aan objecten, welke getallen een bepaalde eigenschap van die objecten kwantificeren.'

'Object' moeten we hier niet als synoniem van 'voorwerp' beschouwen, denk maar aan het meten van de afstand tussen de aarde en de maan, de dichtheid van koper of de interatomaire afstanden in een methaanmolecuul. Sommigen geven er daarom de voorkeur aan in bovengenoemde omschrijving 'object' te vervangen door 'fysisch systeem'.

3.3 Predikaten

Predikaten hebben betrekking op subjecten. In de zin 'kopersulfaat is blauw' is 'kopersulfaat' het subject en 'blauw' het predikaat. Predikaten brengen een ordening aan in de verschijnselen. Predikaten die een classificatie inhouden worden wel *classificerende predikaten* genoemd. Voorbeelden: 'rood', 'lang', 'warm' en 'zwaar'.

Bij *vergelijkende predikaten* (ook wel topologische of comparatieve predikaten genoemd) wordt het mogelijk om met betrekking tot een bepaalde eigenschap een vergelijking tussen objecten te maken en een volgorde aan te geven. Je kunt dan bijvoorbeeld uitspraken doen als 'langer dan..' en 'zwaarder dan...'.
Aan vergelijkende predikaten kunnen getallen worden toegekend, waarbij de volgorde van de getallen wel betekenis heeft, maar waarbij de verschillen tussen de getallen géén betekenis hebben. De toegekende getallen kunnen worden gerangschikt op een *ordinale schaal.*
Vergelijkende begrippen en ordinale schalen komen in de wetenschap veelvuldig voor, bijvoorbeeld de windkrachtschaal van Beaufort en de IQ-schaal in de psychologie. Beoordelingscijfers in het onderwijs behoren ook tot de vergelijkende predikaten.
Een vergelijkend begrip in de chemie is bijvoorbeeld de verdringingsreeks van metalen.

Kwantitatieve predikaten kunnen worden afgebeeld op een continue schaal. Dat kan op een *intervalschaal* en op een *ratio- of verhoudingsschaal.*
Bij een intervalschaal is er geen absoluut nulpunt. Voorbeelden zijn de temperatuurschaal van Celsius, de verschillende elektronegativiteitsschalen en de normaalredox-potentiaalschaal. Hierbij hebben de verschillen wel betekenis, maar verhoudingen niet.
Bij een verhoudingsschaal is er een absoluut nulpunt en hebben naast verschillen ook verhoudingen betekenis. Voorbeelden: lengteschaal, massaschaal, absolute temperatuur-schaal.

Kwantitatieve begrippen noemt men ook wel *grootheden*. In de natuurwetenschappen wordt voornamelijk met kwantitatieve begrippen of grootheden gewerkt, al laten de genoemde voorbeelden zien dat er ook vergelijkende begrippen gebruikt worden.

Literatuur: Stevens, S.S. (1946), On the theory of scales of measurements, Science 103, 677-680.

3.4 Grootheden

Bij het vaststellen van een waarde van een grootheid is een *meetoperatie* nodig. Dit houdt in dat we moeten beschikken over een *meetschaal* en een *meetinstrument*. Bij het meten van grootheden dient men verder over een *eenheid* te beschikken die als standaardmaat fungeert.
Er zijn echter weinig grootheden die door directe vergelijking gemeten kunnen worden. Dit soort grootheden, bijvoorbeeld lengte, massa, tijdsduur en elektrische weerstand, worden *fundamentele grootheden* genoemd. Als ander kenmerk van fundamentele grootheden wordt ook vaak hun additiviteit genoemd: de gezamenlijke lengte van twee objecten is gelijk aan de som van de lengten van de afzonderlijke objecten.
Afgeleide grootheden worden gemeten als fundamentele grootheden. Druk wordt bv. gemeten als lengte van een kwikkolom. Temperatuur kan worden gemeten als lengte van een kwikkolom of als grootte van een elektrische weerstand. Afgeleide grootheden zijn niet additief: menging van twee vloeistoffen met een temperatuur van 293 K geeft immers geen mengsel met een temperatuur van 586 K. Aangezien afgeleide grootheden als fundamentele grootheid worden gemeten, moet er een of andere relatie bekend zijn tussen de afgeleide grootheid van interesse en de fundamentele grootheid die men meet.

3.5 Het meten van grootheden

3.5.1 Meting van fundamentele grootheden

Voor het meten van grootheden dient een keuze gemaakt te worden met betrekking tot de eenheid. De eenheid wordt geoperationaliseerd als *standaard*. Voor een aantal grootheden zijn de standaarden vastgelegd in het SI-stelsel (BINAS).
In de praktijk van het meten van deze grootheden gebruikt men instrumenten die *geijkt* zijn met standaarden die op een of andere wijze afgeleid zijn van de SI-standaarden.

Er is een verschil tussen de grootheden die vanwege wetenschapstheoretische overweging fundamenteel genoemd worden en de vanuit praktische overwegingen gekozen SI-standaarden. Om praktische redenen heeft men naast de drie fundamentele grootheden ook een thermische (temperatuur, Kelvin), een optische (lichtsterkte, candela), een elektrische (stroomsterkte, Ampère) en een chemische (hoeveelheid stof, mol) in het SI-stelsel opgenomen. Voor de fundamentele grootheid elektrische weerstand is geen SI-standaard gedefinieerd. Wel kan de grootheid herleid worden tot de standaard voor de elektrische stroomsterkte.

3.5.2 Meting van afgeleide grootheden

Afgeleide grootheden worden gemeten als fundamentele grootheden, bijvoorbeeld temperatuur als lengte van een kwikkolom. Het gaat er dan om er achter te komen welke waarde de afgeleide grootheid (ook wel *meetgrootheid* genoemd) heeft bij een bepaalde waarde van de fundamentele grootheid. Deze operatie noemt men *ijking*.
Bij een lineair verband zijn twee ijkpunten in principe voldoende, voor niet-lineaire verbanden en om nauwkeuriger te meten zijn meerdere ijkpunten nodig.

Begrippen die gebruikt worden zijn *lineariteit* en *gevoeligheid.* De lineariteit geeft aan in hoeverre de afgeleide grootheid en de fundamentele grootheid met elkaar evenredig zijn. De gevoeligheid heeft betrekking op de verandering van de afgeleide grootheid bij verandering van de fundamentele grootheid. Bij een uitzettingsthermometer kan de gevoeligheid bijvoorbeeld uitgedrukt worden in Kelvin per centimeter.

3.5.3 Meting van samengestelde grootheden

In veel gevallen worden grootheden die men wenst te meten berekend uit één of meerdere meetgrootheden: bijvoorbeeld dichtheid, specifieke weerstand, evenwichtsconstante.
Dergelijke grootheden noemen we *samengestelde grootheden.*
De meetgrootheden waaruit de samengestelde grootheid berekend wordt, zijn gerelateerd in een *meetverband.* De meetgrootheden in dat verband kunnen zowel fundamenteel als afgeleid zijn.

> De samengestelde grootheid 'dichtheid' kan berekend worden uit de meetgrootheden massa en volume (ρ=m/V is dan het meetverband). Dichtheid lijkt ook zonder berekening te meten, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een geijkte areometer. We moeten ons dan wel realiseren dat bij de ijking van de areometer op een of andere wijze een massameting en een volumemeting hebben plaatsgevonden. Die hoeven niet door de experimentator zelf te zijn uitgevoerd. De experimentator kan een aantal vloeistoffen nemen, waarvan hij de dichtheid in de literatuur opzoekt, en daarmee de areometer ijken. De literatuurwaarden zijn echter op een of andere wijze via massa- en volumemetingen tot stand gekomen.

Er is nog een aspect dat samengestelde grootheden onderscheidt van fundamentele en afgeleide grootheden. Fundamentele en afgeleide grootheden worden afgelezen op een meetinstrument. Deze aflezing geeft een rationaal getal met een beperkt aantal cijfers. Als echter de waarde van een samengestelde grootheid wordt berekend uit de waarden van meetgrootheden, dan kan het rekenresultaat een reëel getal zijn met een oneindig aantal decimalen. Dit zou een (te) grote nauwkeurigheid in samengestelde grootheden kunnen suggereren. In het hoofdstuk Foutenleer wordt op deze problematiek ingegaan.

3.5.4 Instellen van grootheden

Om de dichtheid van een vloeistof te bepalen, kunnen massa en volume gemeten worden met een balans en een maatcilinder. Bij de meting wordt de grootte van één van de grootheden globaal gekozen; in dit geval is de keuze van een bepaald volume (bijvoorbeeld 10 ml) het meest praktisch.
Het volume noemen we dan de *ingestelde meetgrootheid,* ook wel de *onafhankelijke variabele.* In ons voorbeeld is de massa dan de *afhankelijke variabele.*

3.5.5 Regelen van grootheden

In veel gevallen worden de waarden van de meetgrootheden beïnvloed door allerlei andere grootheden. Zo kan bij het voorbeeld van de dichtheidsbepaling de gemeten massa afhangen van de luchtdruk, en het gemeten volume van de temperatuur. Luchtdruk en temperatuur zijn in dit voorbeeld *externe grootheden.* De invloed daarvan kan soms in een verband uitgedrukt worden. Vaak is dit niet mogelijk en meestal is het ook niet nodig. Je kunt voor de invloed van externe grootheden corrigeren als de grootte van de invloed bekend is. Een andere mogelijkheid ligt in het constant houden van de externe grootheden, het *regelen.* Een probleem daarbij is echter dat het niet altijd gemakkelijk is de externe grootheden aan te wijzen die de meetgrootheden beïnvloeden.

3.6 Experimentele procedure

Binnen een experimentele procedure kun je de volgende onderdelen onderscheiden:

- Voorbereiding
- Meting
- Meetwaardenverwerking
- Evaluatie.

Foutenleer speelt in alle onderdelen een rol, maar wel op verschillende manieren.
Onder voorbereiding kunnen activiteiten vallen als het nemen van ontwerpbeslissingen, zoals de keuze van meetcondities, het uitvoeren van ijkingen, de zuivering van chemicaliën, het construeren van de meetopstelling en eventueel voorbereidend experimenteren met de meetopstelling. De aard en omvang van deze voorbereidende activiteiten verschilt van geval tot geval en is sterk afhankelijk van de meting en het doel dat men er mee voor ogen heeft.
Bij de meting gaat het om het produceren van meetwaarden. Bij de meetwaardenverwerking gaat het erom deze meetwaarden – indien mogelijk – terug te brengen tot één meetresultaat en daarvan een kwaliteitsmaat te geven.
In een evaluatie gaat het erom het meetresultaat te relateren aan het doel van de meting. Tevens kan worden nagegaan in hoeverre de meetkwaliteit het toestaat om een uitspraak met een bepaalde zekerheid te kunnen doen.
Het verbindende element tussen deze stappen wordt gegeven door de *meetkwaliteit.* De voorbereiding is gericht op het behalen van een gewenste meetkwaliteit, die wordt ontleend aan het doel van de meting. Daartoe worden binnen de meting bepaalde condities gekozen. In een meetwaardenverwerking en evaluatie wordt nagegaan of de beoogde meetkwaliteit is gehaald. Optimalisatie kan dan vervolgens nodig blijken.
De verschillende onderdelen van een experimentele procedure vertonen dus onderling een samenhang vanuit het gezichtspunt 'meetkwaliteit'.
Men zal, als men voor het eerst een meting volgens een bepaalde methode uitvoert, ervaring moeten opdoen met de uitvoering ervan. En men zal na vergelijking met normwaarden voor precisie en juistheid in een proces van optimalisering moeten toewerken naar een meetresultaat met een gewenste kwaliteit.

'Meten' kan dus opgevat worden als een proces van optimalisatie van meetcondities, toewerkend naar een gewenste meetkwaliteit.

3.7 Samenvatting

Een meting blijkt dus een complexe operatie waarbij allerlei keuzes gemaakt dienen te worden met betrekking tot de vereiste instrumenten, instellingen, regelingen, ijkingen, aantal metingen e.d. Deze mogelijke beslissingen worden samengevat onder de noemer meetcondities. De keuze van meetcondities is niet willekeurig, maar is gericht op een bepaalde meetkwaliteit.

4 Journaliseren en verslaggeving

4.1 Inleiding

Het schriftelijk vastleggen van bevindingen is een essentieel onderdeel van experimenteel onderzoek. Hierdoor gaat het verrichte werk niet verloren en kunnen de beschikbaar gekomen gegevens verder worden uitgewerkt door de experimentator. Ook wordt het werk zo toegankelijk gemaakt voor anderen en wordt de mogelijkheid geboden de resultaten te reproduceren.
Bij een experiment zijn twee manieren van rapporteren te onderscheiden: journaliseren en verslaggeven, beide met hun eigen vorm en doel.
In dit hoofdstuk zal eerst kort ingegaan worden op de verschillen tussen de beide soorten rapportage. Vervolgens zullen in de tweede en derde paragraaf respectievelijk het journaal en het verslag in detail worden besproken. In de laatste paragraaf zal vervolgens ingegaan worden op het maken van figuren, zoals grafieken en tabellen.

4.2 Rapporteren: verschillende doelen en vormen

4.2.1 Journaliseren

De rapportage van een experimenteel onderzoek gebeurt in eerste instantie in een *laboratorium-journaal*. Dit is een gestructureerd dagboek dat tijdens het experiment wordt bijgehouden en vooral bedoeld is voor degene die het experiment uitvoert. Het journaal wordt dan ook tijdens elk experiment bijgehouden en beschrijft zowel geslaagde als minder geslaagde (onderdelen van) experimenten.
Het journaal heeft drie belangrijke functies:

- Vastleggen van de voorbereiding en planning van het experiment, inclusief gegevens die tijdens het experiment nodig zijn.
- Het direct, compleet en overzichtelijk vastleggen van de verkregen gegevens tijdens de uitvoering van het experiment.
- Vastleggen van eventuele (tussentijdse) conclusies.

Omstandigheden, condities en verkregen resultaten worden vastgelegd om ze later verder uit te kunnen werken. Ook kan er in een later stadium op teruggevallen worden en wordt het mogelijk het experiment te reproduceren.
De journalisering volgt de gedachtegang van de experimentator tijdens de uitvoering van het experiment en is daarom *chronologisch*. Zo worden ook ondervonden problemen en de wijze waarop deze zijn aangepakt in het journaal vastgelegd.
In de loop van het practicum zul je je eigen stijl van journaliseren ontwikkelen, die zowel voor jezelf duidelijk moet zijn als voor anderen, zoals de practicumassistent. Als voorbeeld, en als mogelijke uitgangspositie bij het ontwikkelen van je eigen structuur, wordt in de volgende paragraaf een standaard journaalstructuur gegeven en besproken.
Het is belangrijk een goede stijl te ontwikkelen aangezien het journaliseren tijdens de afsluitende opdracht van je bachelor (en je master) zeker van essentieel belang zal blijken.

4.2.2 Verslaggeving

Als verdere rapportage kan op basis van het journaal een verslag geschreven worden. Het verslag is veel meer dan het journaal gericht op andere personen dan de experimentator, en heeft onder meer de onderstaande functies.

1. *Structurering* van het experimentele werk. Bij het schrijven van een verslag kan je je beperken tot de zaken die achteraf van het grootste belang zijn gebleken. De structurering zal dan ook eerder thematisch dan chronologisch zijn.
2. *Verantwoording* van het experimentele werk en controle mogelijk maken. Wetenschap en technologie kunnen niet bestaan zonder openbaarheid en verifieerbaarheid.
3. *Beoordeling mogelijk maken.* Dit is niet alleen van belang tijdens de studie, maar ook in de beroepsuitoefening. Een artikel wordt bijvoorbeeld pas in een vaktijdschrift gepubliceerd na een positieve beoordeling door (meestal twee) vakgenoten; publicatie betekent dan ook een positief waardeoordeel over het werk. Verslagen kunnen doorslaggevend zijn bij de beoordeling van subsidiëring of verdere voortzetting van een onderzoeksproject.
4. *Communicatie* over het experimentele werk. Een essentiële voorwaarde hiervoor is dat het verslag gelezen wordt. Voor de leesbaarheid is het van belang dat de inhoud de lezer boeit, bijvoorbeeld doordat iets nieuws besproken wordt. Ook onmisbaar voor de leesbaarheid zijn een duidelijke structuur en een verzorgde presentatie.

Niet van ieder experiment zal een verslag gemaakt worden, net zoals niet ieder experiment uit een groter onderzoek in het eindverslag terecht zal komen. Ook hier is het onderzoek aan het eind van de bachelor (en master) fase een typisch voorbeeld, waarbij je verslag zal gaan over de belangrijkste zaken uit het onderzoek en gebaseerd zal zijn op het journaal. Het leren selecteren van de relevante gegevens is dan ook een bijkomend doel van het verslaggeven tijdens het eerstejaars practicum.
Bij het schrijven van een verslag is het van groot belang van tevoren te bedenken voor wie de rapportage bedoeld is. Afhankelijk van de doelgroep wordt er besloten welke theorie opgenomen moet worden en op welk deel van het proces en de resultaten de nadruk gelegd moet worden. Vaak gaat dit ook in overleg met anderen. Voor het (eerstejaars) practicum moet het verslag gericht zijn op een medestudent met een gelijke achtergrond. De specifieke voorkennis die de experimentator heeft met betrekking tot de proef mag niet verondersteld worden. Het overleg over de inhoud en vorm vindt plaats met de practicumassistent.
Het journaal is een directe weergave van het experiment en dus niet zozeer op een doelgroep gericht. Het belangrijkst is dat het duidelijk en gestructureerd is, voorzien van de nodige details, zodat je zelf in staat bent om het experiment op dezelfde wijze te herhalen of er een verslag van kan maken.

4.3 Het laboratoriumjournaal

4.3.1 Algemene voorwaarden

Zoals gezegd dient het eerstejaarspracticum onder andere voor het ontwikkelen van een goede, eigen structuur voor het schrijven van journaals en verslagen. Uiteraard zijn er een aantal voorwaarden waaraan een goede rapportage altijd moet voldoen. In het volgende worden deze voorwaarden voor het journaal besproken, te beginnen met de inhoud van het journaal.

Wat staat er in een journaal?
Het grootste deel van onderstaande punten is in vrijwel ieder journaal te vinden. Als een onderdeel in een proef echter niet relevant is, dan dient het ook niet opgenomen te worden.

- Datum (en eventueel tijd).
- Doel.
- Verwachting / hypothese. Een verwachting kan bijvoorbeeld een bepaalde waarde zijn, terwijl een hypothese een te toetsen veronderstelling aangeeft. Per proef kan gekeken worden welke het meest voor de hand liggend is.
- Relevante theorie, inclusief bronvermelding (als de bron niet de handleiding is).
- Analyse van het probleem, keuze van een meetmodel en meetmethode (welke en waarom).
- Nauwkeurigheidsanalyse (voorafgaand aan de metingen).
- Beschrijving / bijzonderheden opstelling.
- Formules, reactievergelijkingen, materiaaleigenschappen en apparatuurgegevens die je bij de voorbereiding van belang acht om tijdens het experiment bij de hand te hebben.
- Meetprogramma; dit moet zo duidelijk zijn dat een collega-student hiermee zonder problemen jouw metingen zou kunnen gaan doen.
- Alle metingen en waarnemingen die tijdens het experiment gedaan worden.
- Bijzonderheden tijdens het experiment (storingen e.d.) die van belang kunnen zijn. Als er iets misgaat, is het van belang dat precies vast te leggen.
- Uitwerking van de meetresultaten.
- Foutenverwerking (na de meting, verwerking in de resultaten).
- Discussie / bespreking van de resultaten.
- Conclusie(s).

Wat betreft de structuur is er slechts een algemene voorwaarde die voortkomt uit de logische opbouw van een experiment en het chronologische karakter van het journaal. Ieder experiment dient (thuis) voorbereid te worden en ieder journaal zal dan ook beginnen met een weergave van deze voorbereiding. Daarna volgen de uitvoer van het experiment en de verwerking van de metingen en op basis van de resultaten worden conclusies getrokken. Deze volgorde zal dus ook automatisch in het journaal aanwezig zijn. In de bijlagen is een stroomschema opgenomen dat de logische volgorde laat zien van een experiment en de verschillende fasen beschrijft. Zie bijlage Fasering van onderzoek.

Tenslotte zijn er nog enkele voorwaarden waaraan een journaal moet voldoen betreffende het uiterlijk / de presentatie.

- Gebruik een ingebonden journaalschrift, zodat geen aantekeningen verloren kunnen gaan en nummer de pagina's. In het 'studiepakket' zijn drie van deze journaalschriften opgenomen.
- Gebruik de eerste pagina's voor de inhoudsopgave.
- Werk direct in het journaal en niet op losse blaadjes.
- Een doorhaling moet leesbaar blijven. In een later stadium moet deze misschien weer ongedaan worden gemaakt. Er worden dus ook geen bladen uit het journaal gescheurd.
- Begin elk nieuw experiment op een nieuwe pagina.
- Gebruik normaal gesproken de rechterpagina's; de linkerpagina is alleen voor schetsen van opstellingen, grafieken, aanvullingen, correcties e.d.
- Bij aanvullingen en correcties moet in de tekst aangegeven worden dat er iets aangevuld of gecorrigeerd is, en indien nodig waar dit te vinden is.

4.3.2 Een standaard journaalstructuur

De onderstaande standaard journaalstructuur is een goede leidraad bij het maken van een journaal. Uiteindelijk zullen de meesten hiervan willen afwijken en een eigen stijl ontwikkelen, maar deze structuur is een goed uitgangspunt.

- titel	Vermeld als eerste het opdrachtnummer en de titel van de proef.
- samenwerking	Als er wordt samengewerkt, moet de naam van de ander vermeld worden.
- datum	Vermeld de datum en eventueel de tijd.
- doel	Filter uit de opdrachtomschrijving een concreet en beknopt doel.
- verwachting / hypothese	Welke concrete resultaten verwacht je. Vaak zijn dit getalwaarden voor de te meten grootheid, materiaaleigenschappen, bepaalde reacties of de te verwachten grafiek. Eventueel kan verwezen worden naar literatuur.
- veiligheid	Eventuele veiligheidseisen waaraan voldaan moet worden.
De meetprocedure:	
- theorie	Hier introduceer je de formules, relaties en/of vergelijkingen die je voor de opdracht nodig hebt. (Schrijf dus niet de héle theorie uit het boek over.) Leg de symbolen uit en geef de eenheden erbij. Refereer naar de literatuur die als bron is gebruikt.
- toepasbaarheid	Geef eventueel beperkende voorwaarden waaronder de theorie geldig is.
- formuleren meetmodel	Werk de formules e.d. van de theorie om tot de voor de opdracht nodige vorm. Vaak voeg je een aantal formules samen, zodat je een direct verband krijgt tussen de te bepalen en de te meten grootheden, bijvoorbeeld een lineair verband: $y = b_0 + b_1x$. (Bij dit onderdeel komen er dus géén nieuwe formules meer bij!) Beschrijf welke grootheden gemeten worden, en welke er uit volgen.
- meetmethode	Beschrijf hoe de grootheden gemeten worden, oftewel welke methode wordt gebruikt om een grootheid te bepalen. Geef dit zonodig overzichtelijk aan in een figuur of (schakel)schema.
- bewerking	Geef aan hoe de meetresultaten bewerkt zullen worden. (Bijvoorbeeld in een tabel, een enkele berekening of een grafiek. Wat wordt in een grafiek uitgezet tegen wat? Is het een logaritmische grafiek? Enz.)
- nauwkeurigheids-analyse	Bespreek van alle grootheden die bepaald moeten worden of waaraan gemeten wordt wat de aard van de fout zal zijn. Ook moet besloten worden of er interne of externe foutschatting gebruikt gaat worden. Werk hierbij de fouten uit tot het punt waar ze bepaald worden door de apparatuur of geschat kunnen worden vanwege aflezing e.d. Ook kan al doorgewerkt worden hoe de fouten in te berekenen grootheden afhangen van de fouten in gemeten grootheden. De daadwerkelijke foutgroottes kunnen pas op het practicum zelf bepaald worden en horen bij de foutenverwerking onder 'Metingen en resultaten' thuis.
De opstelling:	
- opstelling	Schets schematisch de opstelling. Vermeld namen, type- en codenummers van de betreffende apparatuur/instrumenten. Geef ook aan van welke stoffen er gebruik gemaakt wordt.
- instellingscriteria	Noteer bij de instelling van apparatuur/instrumenten of onderdelen daarvan hoe de instelling is verricht en gecontroleerd.
- beïnvloeding	Als gemeten grootheden beïnvloed zijn door meters en/of detectoren noteer dan het geconstateerde effect daarvan kwantitatief. Geef ook aan of en hoe hiervoor gecorrigeerd kan worden.
Metingen en bewerkingen:	
- meetprogramma	Geef aan hoeveel metingen er gedaan worden, welke waarden eventueel genomen worden en leg je keuze uit (bijvoorbeeld als rond een bepaald punt gemeten wordt of als er bij een kwadratisch verband in het begin meer punten genomen moeten worden dan op het eind).
- metingen	Presenteer de metingen in tabelvorm. Geef belangrijke waarnemingen duidelijk en gestructureerd aan.

- bewerking	Bereken de te bepalen grootheid, eventueel na de resultaten in een grafiek gezet te hebben. Geef commentaar op de metingen, wees kritisch op je resultaat. Doe eventueel metingen over.
- foutenverwerking	Noteer in de tabel de fouten van de gemeten grootheden en de te bepalen grootheid. Geef aan hoe je aan deze fouten komt. Geef tenminste één voorbeeldberekening van de fout in de te bepalen grootheid.
Discussie en Conclusie:	
- discussie	Geef als de resultaten niet overeen komen met de verwachtingen of de hypothese een reden voor het verschil. Bespreek eventuele problemen in het experiment en mogelijke verbeteringen / adviezen voor een volgende keer.
- conclusie	De conclusie begint met een samenvatting van de resultaten. Geef de bepaalde grootheid in getalvorm of verwijs naar de gemaakte grafiek. Ga na of deze resultaten binnen de foutengrenzen overeenkomen met de verwachtingen of ga na of de hypothese is bevestigd. Geef aan de hand hiervan aan in hoeverre het doel is bereikt. (Realiseer je dat bewerking en conclusie niet hetzelfde is!)

In de bijlage Voorbeeldjournaals zijn twee voorbeeldjournaals opgenomen die volgens de gegeven standaardstructuur zijn gemaakt, één van een natuurkundig en één van een scheikundig experiment. In deze voorbeelden is al duidelijk te zien dat niet altijd alle onderdelen van het standaard schema gebruikt kunnen en hoeven te worden.
N.B. Soms wordt aan het einde van het journaal de volgorde van discussie en conclusie omgedraaid. Dat is te verdedigen, mits de tekst maar een consistent en logisch geheel blijft.

4.4 Het verslag

4.4.1 Algemene voorwaarden

Zoals gezegd wordt een verslag pas achteraf geschreven. Je hebt dan een goed inzicht in de vraag welke zaken van groot en welke van minder groot belang zijn. Een verslag zal dus (in tegenstelling tot het journaal) een onderzoek niet volledig op de voet volgen en niet chronologisch zijn. Je kunt selectief zijn en zaken anders rangschikken als dat tot de duidelijkheid bijdraagt. Een mislukte meetreeks die opnieuw is uitgevoerd en verder geen invloed op het experiment heeft gehad zal in een verslag dus bijvoorbeeld nooit behandeld worden.

Voor de inhoud die je selecteert uit je journaal en de structuur die je in je verslag aan de inhoud geeft, is geen algemeen geldende norm te geven. De keuze die je hiervoor maakt, hangt samen met het antwoord op de volgende vragen:

- Waarover schrijf ik (aard van het experiment)?
- Waarom schrijf ik erover (functie(s) van het verslag)?
- Voor wie schrijf ik (wat verwachten - of eisen - de lezers)?
- Wat zijn de beperkende voorwaarden (o.a. beschikbare tijd, maximale omvang)?

Voor verslagen over eerstejaars practica liggen de antwoorden op deze vragen redelijk vast. Alle opdrachten zijn van onderzoekende aard, in tegenstelling tot bijvoorbeeld een ontwerp-, probleem- of evaluatiegerichte opzet. De functie van het verslag is feitelijk het rapporteren aan de practicumassistent over het uitgevoerde experiment en het oefenen met verslaggeving. De omvang van de verslagen tijdens het eerstejaars practicum zal beperkt zijn, maximaal een stuk of tien pagina's. Voor dergelijke, onderzoekende opdrachten kan een algemeen structuurschema geformuleerd worden als onderstaand:

- Wat wordt er precies onderzocht? Waarom?
- Volgens welke methode, op welke wijze?
- Met welke resultaten?
- Wat zijn de conclusies?

Steehouder[1] e.a. noemen deze vragenvolgorde de onderzoeksstructuur. Wetenschappelijke verslagen zijn altijd in grote lijnen opgebouwd volgens de onderzoeksstructuur, met variaties op basis van het specifieke experiment. In bijlage 4.D Voorbeeldverslag staat een voorbeeldverslag van een natuurkundig experiment.
Nu volgen eerst een aantal algemene aanwijzingen en suggesties voor de aanpak bij het schrijven van een verslag, en daarna een standaard verslagstructuur die als voorbeeld of uitgangspunt gebruikt kan worden.

4.4.2 Aanwijzingen bij het schrijven van een verslag

Zoals gezegd is een belangrijk verschil met een journaal dat een verslag niet chronologisch is, en achteraf wordt gemaakt, als alle resultaten al bekend zijn. Ook de werkvolgorde bij een verslag zal dus afwijken van die bij een journaal.

Bouwplan
Als het goed is, staan in het journaal de belangrijkste zaken al goed uitgewerkt, namelijk de resultaten (tabellen en grafieken), foutenanalyse, -verwerking en conclusies. Op basis van deze gegevens, de doelgroep waarvoor het verslag bedoeld is, het doel dat je wilt bereiken met het verslag en gegeven randvoorwaarden kun je nu selecteren welke resultaten belangrijk zijn en welke zaken uit het journaal dus in het verslag moeten komen. In de volgende paragraaf staat een standaard verslagstructuur.
Door voor jezelf al eens kort langs te lopen wat je bij de verschillende onderdelen zou willen onderbrengen, krijg je een eerste opzet van het verslag: het bouwplan. In bijlage 4.C vind je een lijst met aandachtspunten voor dit bouwplan.
Een verslag schrijf je zoals gezegd voor een ander en daarmee moet je een inschatting maken van die ander of mogelijk zelfs tegemoet komen aan wensen van die ander. Daarom is het vaak handig om ook in deze fase overleg te hebben met een begeleider of iemand van de doelgroep om te kijken naar de opzet van het verslag en de keuzes die je hebt gemaakt. Dit kan veel werk en ook frustratie besparen. Een overleg helpt je ook je gedachten te ordenen waardoor het schrijven vaak veel makkelijker verloopt.
Nadat je hebt besloten wat er in het verslag moet komen, kun je daadwerkelijk aan de slag. Eventueel kun je vast een voorlopige, korte samenvatting schrijven om jezelf te dwingen te formuleren wat de kern van je verslag gaat worden.

Inleiding, theoretische en experimentele aspecten
In de inleiding kun je de inhoud van je verslag verder uitwerken in de vorm van een overzicht van het verslag. Ook geef je daar aan wat je doel was, en aangezien je weet bij welke resultaten en conclusies je uit gaat komen, kun je nu ook precies selecteren welke theorie relevant is voor het verslag. In de theoretische en experimentele aspecten laat je zien hoe het experiment in elkaar zat, wat er gemeten moest worden en waarom, en op welke manier de metingen zijn ingericht en uitgevoerd. Er moet, tijdens het eerstejaars practicum, voor een lezer van je eigen niveau duidelijk blijken waarom de betreffende theorie, het gekozen meetmodel en de methode van meten tot het bereiken van het doel leidt.

---

[1] Steehouder, M.F. e.a., Leren communiceren. Handboek voor mondelinge en schriftelijke communicatie, 5e druk, Wolters Noordhoff, 2006.

Metingen en bewerkingen
Presenteer de relevante metingen en/of de bewerking van de resultaten. Dit kan in tekstvorm, in een tabel of een grafiek. De keuze van de vorm hangt af van of het resultaat bijvoorbeeld een enkel getal of een verband is. Voorzie tabellen en grafieken van dusdanig duidelijke titels en opschriften, dat de lezer desnoods alleen aan tabellen en grafieken het experiment kan beoordelen. Geef duidelijk aan wat de meting of bewerking is en hoe je eraan komt. Numerieke berekeningen behoren echter niet in een verslag. Voorkom ook dat de presentatie van je resultaten een opsomming wordt. Zorg dat het een doorlopend verhaal blijft.

Discussie en conclusie(s)
Werk vervolgens het onderdeel discussie en conclusie(s) uit. In de conclusies moet een antwoord te vinden zijn op vragen als: waren de metingen bruikbaar, wat voor resultaten hebben ze opgeleverd, komen deze resultaten overeen met de verwachting / is de hypothese bevestigd, is het doel van het experiment bereikt, en waarom niet als dit niet het geval is?
De bedoeling van een discussie is dat je kritisch afstand neemt van jouw experiment en het van een ander gezichtspunt bekijkt. Je gaat in op mogelijke vragen als: waar moet je bij het experimenteren op letten, wat had er anders gedaan moeten worden en wat had er beter gekund? Is er een heel andere experimentele aanpak denkbaar voor het gestelde doel? Waarom komen de resultaten niet overeen met de verwachting / waarom was de hypothese onjuist, ligt dit aan het experiment, aan de verwachting / hypothese of aan de theoretische aannames?

Samenvatting en afronding
Als laatste wordt de samenvatting geschreven. Probeer de samenvatting tussen de 50 en de 100 woorden te houden. De samenvatting bevat in ieder geval het doel, de manier waarop gemeten, de verwachting en het resultaat. Op basis van de samenvatting besluit iemand of het verslag voor diegene wel of niet interessant is om te gaan lezen. De informatie om die beslissing te kunnen nemen moet dus voorhanden zijn.
Tenslotte moet er nog een titelblad gemaakt worden, een inhoudsopgave, een literatuurlijst en eventueel een symbolenlijst. Uiteraard is het vervolgens altijd aan te raden het hele verslag nog een keer door te nemen, te controleren op fouten en te kijken of alles goed op elkaar aansluit.

Vormgeving
'Hoe mooier het kán, hoe mooier het moet'. Een prachtig met de hand geschreven structuurformule, in een verslag dat verder met de tekstverwerker gemaakt is, staat toch slordig. Omdat de tekst normaal gesproken precies recht geprint wordt, kan een ietsje scheef ingeplakt plaatje juist méér opvallen. Gebruik niet teveel stijlmogelijkheden tegelijk (lettertypes, vet, groter, cursief, onderstreept, combinaties daarvan), dat komt ook weer rommelig en onverzorgd over. En schrijffouten kunnen niet.

4.4.3 Een standaard verslagstructuur

- titelblad	Hierop staan de titel en het opdrachtnummer van de proef, de naam van de experimentator en de datum. Als er bij de proef is samengewerkt, moet ook de naam van de ander worden vermeld.
- samenvatting	De samenvatting moet te begrijpen zijn voor iemand die de rest van het verslag niet gezien heeft. Het doel van de proef, de meetmethode en de belangrijkste resultaten en conclusies worden behandeld. In de samenvatting staan geen details.
- inhoudsopgave	De verschillende onderdelen van het verslag worden genoemd met de bijbehorende paginanummers.
- inleiding	De inleiding bevat het doel van de proef. Daarnaast wordt er een korte indeling van het verslag gegeven.
- theoretische aspecten	Hier wordt de vooraf bekende theorie gegeven, o.a. de belangrijkste formules. Tevens wordt ook het gekozen meetmodel behandeld en eventueel is er een voorbeschouwing over de nauwkeurigheidseisen.
- experimentele aspecten	Bij experimentele aspecten komt de praktische uitvoer aan bod. De meetmethode, gebruikte apparatuur en/of maatglaswerk worden besproken. De lezer moet hiermee het experiment kunnen herhalen.
- metingen en bewerkingen	De essentiële metingen worden vermeld, alsmede belangrijke bewerkingen. Bespreek de foutenanalyse en geef commentaar op de resultaten (inclusief foutverwerking).
- discussie en conclusies	Conclusies bevatten de concrete eindresultaten. Maak de vergelijking met de verwachte resultaten m.b.v. de foutengrenzen. Bediscussieer mogelijke verschillen en geef ideeën voor vervolgonderzoek. Hier komt nooit nieuwe informatie naar voren.
- symbolenlijst	Schrijf de gebruikte symbolen met hun eenheden op. Geef uitleg aan indices die gebruikt worden.
- referenties	Lijst van gebruikte literatuur. Geef in de hoofdtekst, bijvoorbeeld bij de theorie, verwijzingen naar de genoemde literatuur.

4.5 Tabellen, grafieken en figuren

Door het gebruik van tabellen, grafieken en figuren in journaals en verslagen kan de schrijver zijn gegevens compact en overzichtelijk presenteren. Bovendien vormen ze in publicaties een belangrijke toegang tot de gegeven informatie. Daarom is het van belang dat ze volgens algemeen geldende regels worden opgesteld. In deze paragraaf worden die regels gegeven.

4.5.1 Tabellen

Een tabel dient aan de volgende regels te voldoen (zie ook de voorbeeldtabellen):

- Boven de tabel staat aangegeven waar deze betrekking op heeft d.m.v. een titel.
- Daarnaast is de tabel genummerd. Naar dit nummer moet in de tekst worden verwezen.
- In de kop van de tabel worden de symbolen van de grootheden vermeld met tussen haakjes hun eenheden (S.I.-eenheden of daarvan afgeleide eenheden). De eenheden komen niet achter de waarden zelf te staan. De gebruikte symbolen moeten elders zijn gedefinieerd.
- Door de tabel doordacht in te delen, kan ook de verwerking van de meetgegevens en van de resultaten erin opgenomen worden. Aangegeven dient te worden (bijvoorbeeld in formulevorm) hoe de berekende uit de gemeten grootheden volgen.
- Ook de fouten in de grootheden kunnen in de tabel vermeld worden.
- De komma in de getallen in de tabel moet op een zinvolle plaats staan, dus niet teveel nullen voor of achteraan het getal. Dit kan door een macht van tien apart te schrijven of aan te geven bij de eenheid in de kop van de tabel.

Voorbeeldtabel 1: Samenstelling van de gebruikte mengsels

Mengsel	Massa (gram)	
	Aceetanilide	Benzoëzuur
I	0,28	1,00
II	0,74	1,00
III	1,00	0,60
IV	1,00	0,23

Voorbeeldtabel 2 : Bepalen frequentie slinger

Meting	10**T* (s)	Δ(10**T*) (s)	*T*(s)	Δ*T* (s)	*f* (Hz) (=1/*T*)	Δ*f* (Hz)
1	20,3	0,2	2,03	0,02	0,493	0,005
2	20,4	0,2	2,04	0,02	0,490	0,005
3	20,1	0,2	2,01	0,02	0.498	0,005

4.5.2 Grafieken

Het gebruik van grafieken om meetgegevens weer te geven heeft vier doelen:

- Een overzichtelijke en compacte presentatie van de gegevens.
- Toetsing van het fysisch model van het betreffende probleem aan de meetgegevens, ofwel het demonstreren van een verwacht verband dat in de tabel niet direct zichtbaar is.
- De mogelijkheid om na te gaan of er duidelijk onjuiste meetpunten zijn (uitschieters).
- Controle van de overeenkomst tussen de foutengrenzen per meetpunt en die in de modelgrootheden (helling, asafsneden).

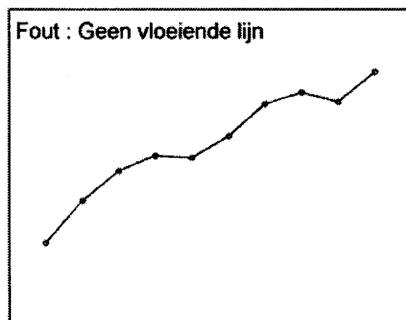
Uit het eerste en het tweede doel volgen twee algemene regels.

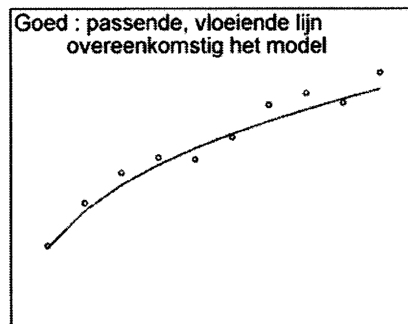
- De meetpunten, met foutengebieden!, moeten duidelijk aangegeven zijn.
- Kies de uit te zetten grootheden en schalen bij voorkeur zo, dat een rechte lijn kan worden verwacht. (Hierop zal in detail op worden ingegaan in 6.4.3)

Daarnaast gelden nog een aantal andere, meer specifieke regels.

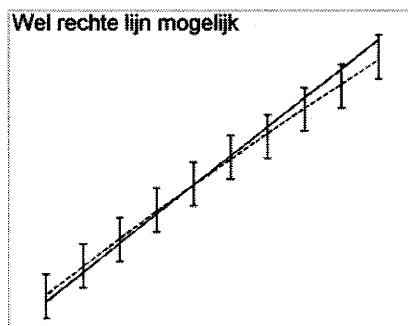
- Boven de grafiek staat aangegeven waar deze betrekking op heeft d.m.v. een titel.
- Daarnaast is de grafiek genummerd. Naar dit nummer moet in de tekst worden verwezen.
- Langs de assen moeten de grootheden (symbolen en/of naam) met eenheid worden vermeld. De onafhankelijke variabele wordt horizontaal uitgezet.
- Alle bijschriften worden horizontaal geschreven.
- De grafiek wordt in het journaal op de linkerpagina ingeplakt. In het verslag wordt de grafiek tussen de tekst gevoegd of achteraan bijgevoegd.
- Wanneer in een verslag een grafiek wordt gemaakt, hoeven de meetwaarden zelf niet altijd in een tabel meer gepresenteerd te worden. Alleen als de meetwaarden op zich van belang zijn, moeten ze worden opgenomen.
- Waar mogelijk wordt de numerieke waarde van de te bepalen grootheid uit de asafsnede en/of de helling van een rechte lijn bepaald.
- Hiervoor kan het noodzakelijk zijn dat grootheden logaritmische of exponentieel worden uitgezet.
- Gebruik zulke schaalwaarden dat de schaaleenheid via een schaalfactor 10n, 2.10n of 5.10n met de eenheid van de uitgezette grootheid samenhangt. Een schaalwaarde kleiner dan de nauwkeurigheid dient vermeden te worden.

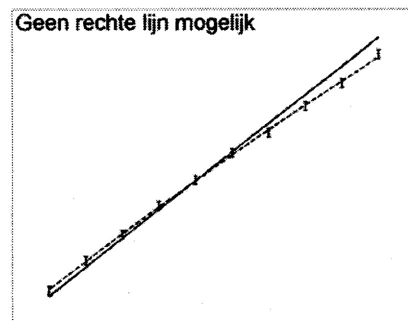
- Bij de assen worden genoeg getallen geplaatst om snel te kunnen aflezen; niet te veel, daardoor wordt het onoverzichtelijk. Zet ook nooit de getalwaarden van de meetpunten langs de assen uit.
- Gebruik bij meerdere lijnen in één assenkruis voor de verschillende series meetpunten bij voorkeur verschillende symbolen (o, x, *, etc.).
- Trek een rechte lijn of vloeiende kromme die zo goed mogelijk bij de meetpunten aansluit. In de praktijk is het meestal afdoende ervoor te zorgen dat ongeveer evenveel meetpunten boven als beneden de lijn liggen, zoals bij de kleinste kwadratenmethode zal blijken (zie hoofdstuk Foutenleer). Trek alleen lijnen zoals die op basis van het theoretisch model worden verwacht. Wanneer er geen verwachting is voor de vorm van de grafiek, trek dan geen lijn.



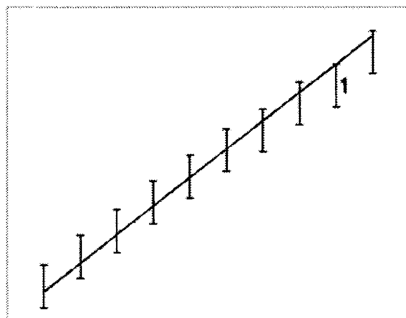


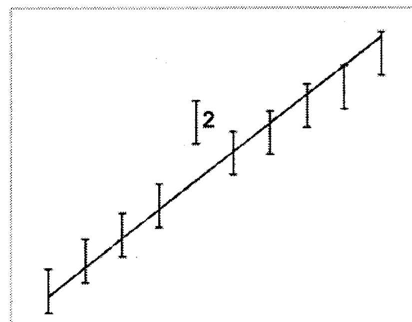
- Aangeven van foutengrenzen in een grafiek is erg belangrijk. Door verkeerde of ontbrekende foutengrenzen kan onduidelijk zijn of er sprake is van een lineair verband of niet.



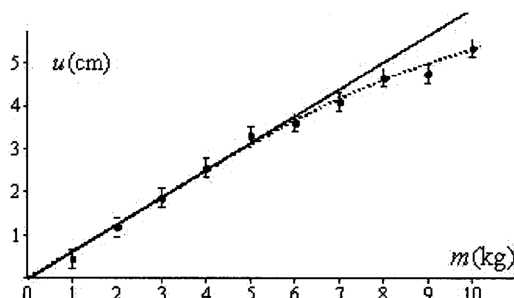


- Weglaten van uitschieters. Het is nooit toegestaan meetresultaten, die een andere grootte hebben dan verwacht, zonder meer weg te laten. Het is slechts toegestaan een uitschieter als een te verwerpen meetwaarde te beschouwen, als er één of meer gegronde redenen voor zijn (houd rekening met foutengrenzen). Punt 2 kan als uitschieter worden beschouwd, punt 1 niet!





- Ook is het mogelijk dat een in eerste instantie lineair verband bij hoge waarden niet meer lineair is, bijvoorbeeld een te ver uitgerekte veer in een massa-veer systeem. Dan zijn dus de meetpunten die niet op de rechte lijn vallen geen uitschieters.



- Geëxtrapoleerde of geïnterpoleerde gedeelten worden van de rest onderscheiden, bijvoorbeeld door stippelen.
- Het komt vaak de overzichtelijkheid ten goede in een grafiek meer dan één meetserie uit te zetten (bijvoorbeeld een meting van de concentratie als functie van de tijd bij verschillende temperaturen of verschillende beginconcentraties). Geef in dat geval wel duidelijk aan welke lijn wat voorstelt, en duid de meetpunten van de verschillende meetseries met verschillende symbolen aan.

4.5.3 Overige figuren

Naast tabellen en grafieken is het in bijna elk journaal en/of verslag nodig een goede opstellingstekening te maken. Ook hiervoor zijn enkele algemene regels te geven.

- Gebruik altijd een schematische, tweedimensionale, weergave. (Ga dus nooit een kunstwerk maken.)
- In de meeste gevallen is het precieze uiterlijk van de opstelling niet van belang, dus rangschik de verschillende onderdelen in het schema op een handige manier en probeer niet het werkelijke uiterlijk te benaderen.
- In veel gevallen, zoals bij componenten in elektrische schakelingen, standaard apparatuur, glaswerk, enz., bestaan er internationale tekens / pictogrammen.
- Geef in schema's geen namen, beschrijvingen, typenummers, e.d. aan, maar gebruik nummering en een legenda.
- Geef, net als bij grafieken en tabellen, ook de opstellingstekening een naam en een nummer, zodat er naar verwezen kan worden.

Het kan bij de theorie, bijvoorbeeld over een optisch systeem of het gebruik van maatglaswerk, verhelderend werken een figuur te gebruiken. Hou je ook in dat geval zo veel mogelijk aan de genoemde regels. Behandel ook dit soort figuren als 'echte figuren'. Geef ze dus een naam en een nummer, en zet ze niet zomaar tussen de tekst door.

In een journaal zullen figuren automatisch op een logische plek terechtkomen door de chronologische opbouw van het journaal. In een verslag is de rol van figuren iets anders, aangezien er in dat geval een afweging gemaakt moet worden welke figuren al dan niet relevant zijn voor het verslag. Tabellen met meetgegevens die ook in een grafiek zijn verwerkt, worden in een verslag bijvoorbeeld regelmatig weggelaten. In het geval dat er een aantal grafieken met zeer veel overeenkomsten gemaakt zijn, kan het voldoende zijn slechts één van deze grafieken in de hoofdtekst van het verslag te plaatsen, en de overige in een bijlage. Gebruik in de bijlage

wel dezelfde regels als in de hoofdtekst, en zorg dat er een duidelijke verwijzing is naar de figuren in de bijlage.

5 De Universiteitsbibliotheek

5.1 Inleiding

Een essentieel onderdeel van wetenschap bedrijven is over je bevindingen te berichten. En als consequentie is ook het gebruiken van wat anderen te melden hebben gehad een fundamenteel onderdeel van wetenschap bedrijven. Zowel zinvol rapporteren als het efficient zoeken en vinden van relevante hoogwaardige informatie zijn elementen van academische vaardigheden. Het instrument dat je hierbij gebruikt is de Universiteitsbibliotheek. In de volgende paragrafen volgt een kort overzicht van de mogelijkheden van de Universiteitsbibliotheek.

5.2 Een wetenschappelijke bibliotheek

Een bibliotheek is een verzameling van informatiebronnen samengesteld met een bepaald doel voor ogen en een bepaalde groep gebruikers. De Universiteitsbibliotheek (UB) van de Universiteit Twente bezit daarom een collectie die toegespitst is op het lopende onderzoek en onderwijs.
De collectie omvat o.a. boeken, encyclopedieën, naslagwerken, proefschriften, scripties, databases en tijdschriften. Inhoudelijk bewegen deze werken zich tussen inleidend en specialistisch., waarbij inleidend minstens beginnend universitair niveau veronderstelt. Een kwaliteitskeurmerk ontlenen de werken aan de uitgever, een redactieraad, of het aanschafbeleid van de bibliotheek (in overleg met de faculteiten).
De UB bevat dus weinig of geen werken over bijvoorbeeld taalwetenschappen of theologie, waarvoor je naar de bibliotheek van een algemene universiteit zult moeten. Ook niets over bloemschikken of het houden van een hond, waarvoor je naar een openbare bibliotheek moet, of het open internet natuurlijk.

5.3 Een bibliotheek of het internet?

Velen leven in de veronderstelling dat "alle" informatie wel op "het" internet te vinden is.
Dat is *niet* waar binnen een academische setting en wel om een aantal redenen:

1. Binnen een academische omgeving hecht men veel waarde aan de kwaliteit van de informatie. Zowel op het gebied van wetenschappelijkheid als op het gebied van betrouwbaarheid. Veel informatie op het internet kan niet aan deze eisen voldoen en is daarom onbruikbaar.
2. Het internet is een communicatiemiddel dat ook door de UB wordt gebruikt om met name digitale tijdschriften beschikbaar te stellen. Deze tijdschriften zijn alleen beschikbaar binnen het campusnetwerk en omdat de universiteit daar veel geld voor betaalt (een "gesloten" internet). De UB probeert deze informatie zo naadloos mogelijk beschikbaar te hebben. Het kan dus lijken dat deze informatie vrij beschikbaar is, hoewel je in feite in de (digitale) bibliotheek aan het werken bent, inclusief bijbehorende kwaliteitskeurmerken. Daarom is het belangrijk de digitale bibliotheek te herkennen.
3. Veel informatie op het "open" internet is opgeslagen in databases, het zogenaamde "diepe" internet. Hoewel in principe vrij toegankelijk kun je deze informatie niet vinden met een zoekmachine als Google, omdat die niet *in* zo'n database kan zoeken.

5.4 De organisatie van informatie in de UB

5.4.1 De website

De website van de UB is www.utwente.nl/ub. Hierop vind je alle informatie *over* de UB. Verder is dit ook het platform waarmee de bibliotheek naar je desktop komt en alle digitale informatie beschikbaar is.

5.4.2 De catalogus

De catalogus beschrijft het bezit van de Universiteitsbibliotheek: zowel gedrukte als elektronische materialen. Van boeken worden de titels en auteurs opgenomen, en aangevuld met trefwoorden die de inhoud van het boek proberen te beschrijven. De inhoudsopgaven worden niet opgenomen in de catalogus. Van tijdschriften worden de titels opgenomen, en welke jaargangen we precies hebben. De titels van de individuele artikelen worden niet opgenomen. Zowel van boeken als tijdschriften staat aangegeven waar je de gezochte materialen kunt vinden: een kastnummer of een link. Als een object zowel digitaal als gedrukt aanwezig is, staat dat ook aangegeven.
De meest ruime zoekactie voer je uit door te zoeken in "alle woorden", waarbij je door woorden uit titel, trefwoorden en auteursnamen tegelijk zoekt. Als je specifieker wilt zoeken, dan kun je dat aangeven. Soms is het handig om te kijken welke termen beschikbaar zijn, dat kan met de functie "browse".
Verder bevat de catalogus een module waarin je je lenergegevens kunt beheren.
De catalogus is vrij te raadplegen. Echter de toegangen naar digitale materialen werken alleen als je onderdeel bent van het campus netwerk (direct of via VPN).

5.4.3 De digitale bibliotheek

Veel tijdschriften zijn inmiddels volledig digitaal. Op de website staat daarom een link "Find e-journal" die direct naar de tijdschriften verwijst, bruikbaar als je al weet welk tijdschrift je nodig hebt, of "Locate an article" als je alle details van het artikel hebt.
Meestal zul je nog niet weten welk tijdschrift of artikel je nodig hebt. Daarom zijn er databases met samenvattingen van artikelen met allerlei zoekmogelijkheden om relevante artikelen te vinden over een onderwerp. "Find databases for searching" is een tool om je te helpen een geschikte database te vinden. "Frequently used databases" verwijst naar een aantal grote multidisciplinaire bestanden. "Quicksearch" laat je tegelijk in een aantal databases tegelijk zoeken, vooral om te testen of je zoektermen opbrengen wat je had verwacht.
De tijdschriften zelf staan op de websites van de uitgevers. Vaak zijn ze georganiseerd als traditionele tijdschriften, dus in jaargangen, afleveringen en pagina's. De UB heeft licenties op veel titels, maar uitgevers hebben altijd meer beschikbaar dan dat onze licenties reiken. Daar kun je dan niet bij.
Databases, maar ook zoekmachines als Google Scholar en Live Search Academic bevatten in hun resultatenlijsten vaak twee soorten linking. "full text" of iets wat daarop lijkt, en wat je verbindt met de site van de uitgever alwaar je rechten dan worden getest. Daarnaast bestaat een link met een tekst als "SFX". Deze link verwijst naar de digitale bibliotheek. Dan wordt eerst bij de bibliotheek getoetst of ze je rechten hebt op een bepaald artikel en de juiste link geleverd indien je rechten hebt.

5.4.4 De fysieke collecties

In de Vrijhof staan de gedrukte boeken en tijdschriften.
Veel materialen staan in een open opstelling, vrij te raadplegen en grotendeels ook te lenen. De boeken staan op volgorde van "shelf mark", en dan met name het numerieke deel dat een

soort onderwerpscodering bevat. Het gevolg hiervan is dat boeken met eenzelfde onderwerp bij elkaar staan.
Een deel van de collectie staat in magazijnen, herkenbaar aan MB of MT in de plaatscode. Deze materialen kun je aanvragen bij de balie en via het web met de catalogus.
Lenen gebeurt allicht in de Vrijhof. Terugbrengen van boeken kan bij de recepties van de onderwijs- en onderzoeksgebouwen.

5.5 Services

In de bibliotheek zijn mensen werkzaam om je te helpen om een groot instrument als een bieb optimaal te gebruiken.
De mensen aan de **balie** kunnen je helpen met allerlei praktische zaken rondom lenen en raadplegen.
Mocht je iets willen wat niet in de bieb aanwezig is, een boek of een artikel, dan kunnen de mensen van het **IBL** (InterBibliothecairLeenverkeer) je helpen om het toch in handen krijgen.
Verder zijn er in de onderwijs- en onderzoeksgebouwen **Informatiespecialisten** aanwezig, die afhankelijk van het wetenschapsdomein kunnen helpen met het helder krijgen van zoekvragen en relevante databases kunnen aanwijzen. Voor TNW: mevr. dr. ir. Hanneke Becht, te bereiken via hanneke.becht@utwente.nl en ir. Wim Oosterling (voor TN), w.c.oosterling@utwente.nl.
In de Vrijhof vind je verder uitgebreide studiefaciliteiten, met en zonder PC's, individueel en voor groepen.

5.6 Systematisch informatie zoeken

Je kunt allicht ergens in een database of zoekmachine wat woorden intypen en tevreden zijn met wat er dan uitkomt. Je kunt ook een wat kritischer houding ontwikkelen die past in een academische omgeving. Het volgende stappenplan kan je helpen om de noodzakelijke vragen te stellen:

1. Over welk onderwerp zoek je informatie, welke vraag wil je beantwoorden?
2. Wat voor soort informatie zoek je (artikel, boek, getallen, ontwerp, bedrijfsinformatie etc.)?
3. Welke database ga je gebruiken en waarom?
4. Welke termen ga je gebruiken, afhankelijk van database en soort informatie?
5. Welk gereedschap van de database gebruik je?
6. Wat is dan je gedetailleerde zoekzin per database?
7. Wat is de betrouwbaarheid van de gevonden informatie?
8. Heb je goed gezocht? Goede database, goede termen, goede techniek? Of moet je dingen wijzigen?
9. Heb je je acties en resultaten gedocumenteerd?

Zoeken en daaruit leren is een cyclisch proces dat doorgaat zolang je met een project bezig bent.
Het is belangrijk je te realiseren wat je al wel weet, en van daaruit een fundament van kennis op te bouwen waarop nieuwe informatie vruchtbaar neervalt.
Het vinden van relevante boeken kan lastig zijn omdat boeken meestal over een breder onderwerp gaan dan precies datgene waar jij in geïnteresseerd bent, maar boeken integreren wel een boel informatie tot een samenhangend verhaal. Als je uitgaat van losse artikelen of websites zul je zelf die integratie tot stand moeten brengen, ten koste van veel tijd.

Betrouwbaarheid is een belangrijk onderwerp in een academische omgeving. De bibliotheek – ook in haar digitale verschijningsvorm – garandeert in ieder geval een soort van academische kwaliteit. Het is dus zaak de digitale bibliotheek snel te herkennen, ook al betreedt je haar vanuit het open internet.
Documenteren van je zoekacties, je keuzes, je resultaten en je evaluaties van je keuzes is een vanzelfsprekendheid binnen een academische omgeving waar je verantwoordelijkheid moet afleggen over je gedrag, moet kunnen uitleggen waarom je iets wel doet en iets anders laat.

5.7 Informatie gebruiken: refereren en plagiaat

Wanneer je voor een verslag (rapport) informatie (voorschrift voor een analyse, experimentele opstelling, theoretische gedachtegang etc.) gebruikt uit de literatuur, dan behoor je dat aan te geven met een referentie. Een referentie bevat precies die gegevens die jouw lezer nodig heeft om dezelfde tekst te lezen als jij hebt gelezen, en dat dan onafhankelijk van de mogelijkheden van een bibliotheek, zoekmachine of website.
Een verslag bevat ook niet meer dan precies die referenties die je nodig had om het verhaal te schrijven, maar ook niet minder!!

Een referentie bevat de volgende elementen:

- Website:
  Auteur, *titel site*, volledig URL, datum beschikbaarheid:
  Kyocera Corporation; *Digital showcase: automotive*;
  http://global.kyocera.com/application/automotive/index.html, available 21 june 2007
- Boek:
  auteurs, *titel boek*, uitgever, jaar van uitgave, editie als niet de eerste, pagina's als je een selectie gebruikt
  J.C.Gerdeen, H.W.Lord, R.A.L.Rorrer; *Engineering design with polymers and composites*, CRC, 2006
- Deel van boek:
  auteurs, *titel deel*, titel boek, samensteller boek, uitgever, jaar van uitgave, pagina begin - pagina eind
  R.Kamo; *Adiabatic diesel engines*; in: Engineered materials handbook, vol 4: Ceramics and glasses; ed. S.J.Schneider; ASM International; 1991; 987-994
- Artikel:
  auteurs, *titel artikel,* titel tijdschrift, jaartal, jaargang, aflevering, pagina begin – pagina eind
  S.M. Sapuan, M.A. Maleque, M. Hameedullah, M.N. Suddin, N. Ismail; *A note on the conceptual design of polymeric composite automotive bumper system;* Journal of Materials Processing Technology; 2005, 159(2), 145-151

Ook in een elektronische omgeving gebruik je deze klassieke beschrijving van een artikel omdat het bijbehorende URL niet echt prettig is als er al geen identificatiecodes van een zoekactie inzitten: http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TGJ-4DFX3JV1&_user=499905&_coverDate=01%2F30%2F2005&_rdoc=1&_fmt=&_orig=search&_sort=d&view=c&_acct=C000024538&_version=1&_urlVersion=0&_userid=499905&md5=fdae378c55fcea7b5fea280e7a4fd3df
Bovendien zijn de meeste platforms van uitgevers ook opgebouwd langs klassieke, traditionele structuren.

Daarnaast weet je natuurlijk ook niet welke mogelijkheden je lezer heeft voor toegang tot elektronische artikelen.

Nu heel veel informatie elektronisch beschikbaar is (in elektronische tijdschriften of op het open internet) is het heel gemakkelijk geworden om met kopiëren en plakken een tekst in elkaar te sleutelen. Dit komt heel dicht bij plagiaat, een van de hoofdzonden in de wetenschappelijke wereld. En bovendien: vanwege diezelfde aanwezigheid van de elektronische bronnen heel gemakkelijk te ontdekken.

Wanneer je een tekst parafraseert, of wanneer je een opmerking maakt in de geest van "zoals Pietje[1] reeds heeft aangetoond" kun je volstaan met een referentie zoals hierboven is beschreven.
Wanneer je een (deel van een) tekst *letterlijk* overneemt, zul je dat duidelijk moeten aangeven met aanhalingstekens. Voorbeeld "The Internet and the World Wide Web have brought many dimensions of new technology to education and research in geomorphology."[2] met dan onderaan de tekst:
[2] J.F.Shroder, M.P.Bishop, J.Olsenholler, J.P.Craiger, *Geomorphology and the World Wide Web;* Geomorphology, vol 47(2-4), 343-363, **2002**

Alle andere manieren van omgaan met je bronnen is plagiaat.
Enerzijds pronk je met andermans veren, anderzijds doe je afbreuk aan het werk dat een ander heeft verzet. Bovendien: mocht er kritiek komen op de inhoud van de betreffende tekst, dan kun je je niet verdedigen met de opmerking, dat een ander dat heeft gezegd.

5.8 Literatuurlijst

De URL's van de elektronische werken zijn het snelst gevonden via de catalogus op http://www.utwente.nl/ub/ CATALOGUE op linker navigatiebalk.

5.8.1 Naslagwerken met algemene informatie, ook numerieke

Dictionary of Inorganic Compounds; J.E. Macintyre e.a. eds.	CBa 546(03) d040
The Merck Index: an encyclopedia of chemicals, drugs and biologicals; M.J.O'Neil e.a. eds	CBa 540(03) m049
Ullmann's encyclopedia of industrial chemistry; W. Gerhartz e.a. eds	elektronisch
Kirk-Othmer encyclopedia of chemical technology; J.I.Kroschwitz e.a. eds	elektronisch
Sensors: a comprehensive survey; W.Gopel	EL e17 s057
Sensors update	elektronisch
Perry's chemical engineers' handbook; D.W.Green ed.	CBa 66(03) p034
Polymer Handbook; J.Brandup e.a.	CBa 678(03) p067
Encyclopedia of physics; R.G. Lerner e.a. eds; 2 vol	CBa 53(03) e030

5.8.2 Naslagwerken met algemene numerieke gegevens

CRC Handbook of chemistry and physics: a ready-reference	TN 53(083) c040

book of chemical and physical data; D.R.Lide ed.	(CD-rom) CBa 540(03) h022 (boek)
Landolt-Boerstein: Zahlerwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik;	TN 53(083) l018
International critical tables of numerical data, physics, chemistry and technology;	elektronisch
Lange's handbook of chemistry; N.A. Lange e.a. eds	CBa 540(083) l020

en verder m.n. TN 53(083) en CBa 540(083)

5.8.3 Naslagwerken met specifieke numerieke gegevens

Encyclopedie des gaz = gas encyclopedia	TN 53(083) e033
Industrial solvents handbook; E.W. Flick ed.	CBa 540(083) i045
Chemistry data series, D.Behrens e.a. eds.	CBa 540(083) c022
Handbook of aqueous solubility data; S.H.Yalkowsky e.a. eds.	CBa 540(083) y010
JANAF thermodynamical tables; M.W.Chase ed.	CBa 540(083) t040

5.8.4 Naslagwerken met veiligheids gegevens

Sax dangerous properties of industrial materials; R.J. LewisSr e.a. eds.	CBa 301.775 s020
Chemiekaarten: gegevens voor veilig werken met chemicalien	elektronisch, en op de meeste laboratoria
Handbuch der gefaehrlichen Gueter; G.Hommel	CBa 301.775 h022, elektronisch en op de meeste laboratoria
MSDS, materials safety data sheets; vooral op het open Internet te vinden.	http://www.cdc.gov/niosh/ipcs/ipcs0000.html als voorbeeld

5.8.5 Laboratoriumtechnieken

Statistical methods for physical science; J.L.Stanford e.a.	TN 53.08 m054
Real-time physics: active learning labortories, 2 vols; D.R.Sokoloff e.a.	TN 53.08 s073
An introduction to experimental physics; C.Cooke	TN 53.08 c034
Experimental physical chemistry: a laboratory textbook; A.M. Halpern	CBa 541.1 h019
Encyclopedia of chemical physics and physical chemistry. J.H. Moore	CBa 541.1 e030
Physical methods of chemistry; B.W.Rossiter e.a.	CBa 540:542 p044
Chemical principles in the laboratory; E.J.Slowinski e.a.	CBa 540:542 s066
Practical skills in chemistry; J.R. Dean	CBa 540:542 p082

5.8.6 Meet- en regelsystemen

Introduction to process control, J.A. Romagnoli	CBa 62-5 r
Introduction to feedback control; K.Morris	EL 62-5 m081
Inleiding besturingssystemen; A.M.Lister e.a.	CBa 516.31 l064 CTs 516 l064

5.8.7 Bereidingsvoorschriften

Polymer syntheses; S.R.Sandler e.a.	CBa 678.001 s016
Solid-phase organic syntheses; A.W.Czarnik	CBa 547.07 s074
Organic syntheses based on name reactions and unnamed reactions; A. Hassner	CBa 546.076 h033
Organic syntheses: an annual publication of satisfactory methods for the preparation of organic chemicals	CBa 547.07 o036
Synthesis of inorganic materials; U.Schubert e.a.	CBa 620.26 s050

5.8.8 Analysevoorschriften

Encyclopedia of analytical chemistry: applications, theory and instrumentation; R.A. Meyers ed.	CBa 543(03) e030
Vogel's textbook of quantitative chemical analysis; A.I. Vogel e.a.	CBa 543.062 v073
Problem solving in analytical chemistry; K.Crawford e.a.	CBa 543 c040
Physical methods for materials characterisation; P.E.J. Flewitt e.a.	TN 620.246 f032
Experimental innovations in surface science: a guide to practical laboratory methods and instruments; J.T.Yates	TN 620.236 y025

5.8.9 Informatie zoeken

Systematically and efficiently searching for scientific information; A.A.K. Boxem, W.C.Oosterling	Cba 025.5 s099
Online searching: a scientist perspective: a guide for chemical and life science; D. Ridley	CBa 0/4+7/9 r046
Manual of online search strategies, vol 1 sciences; C.J. Armstrong e.a.	CBa 025.6 m022
Biosciences on the Internet: a student's guide; G.Dussart	CBa 025.5 d093
How to find chemical information: a guide for practicing chemists, educators and students; R.Maizell	CBa 025.5 m017
Student guide to research in the digital age: how to locate and evaluate information sources, L.F. Stebbins	CBa 025.5 s083
Literature search strategies for interdisciplinary research: a sourcebook for scientists and engineers, L.G. Ackerson	CBa 025.5 l065
Communicating chemistry; P.D.Bailey	CBa 301.4 b015

6 Foutenleer

6.1 Scoop van Foutenleer

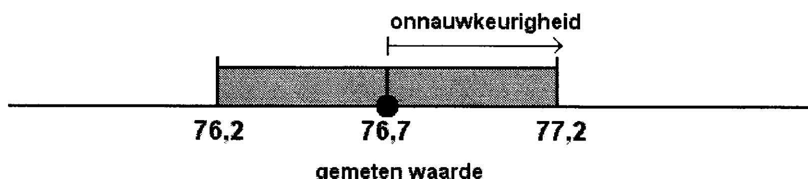
De nauwkeurigheid van een meetresultaat is vaak net zo belangrijk als de meetwaarde zelf. In zijn boekje "Practical Physics" (1968) memoreert G.L. Squires de ontdekking van het isotoop deuterium $^{2}_{1}H$. Een illustratie van wat significante cijfers betekenen.

Deuterium
In 1929 werd uit een chemische bepaling van de atoomgewichten de verhouding van de massa van het waterstofatoom en de massa van het zuurstofatoom bepaald op
massa H / massa O = (1,00799 ± 0,00002) / 16
In 1927 had Aston met een massaspectrograaf dezelfde verhouding bepaald en gevonden
massa H / massa O = (1,00788 ± 0,00005) / 16
De tegenstrijdigheid in deze waarden bracht Birge en Menzel in 1931 tot de veronderstelling dat bij de chemische bepaling de gemiddelde massa van de atomen in normaal waterstofgas werd gemeten.

Het is een uitdaging om nauwkeurige resultaten te presenteren. Om een grote nauwkeurigheid te bereiken is een foutenanalyse vooraf de beste manier om een experiment te plannen. Foutenanalyse is daarom allesbehalve een vervelend achterafje van experimenteren.
Dit hoofdstuk geeft een introductie van de belangrijkste topics in de cursus Foutenleer.

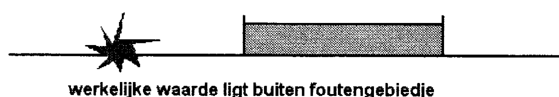
6.1.1 Foutengebiedje

Meestal is de *"werkelijke waarde"* van een grootheid onbekend, we benaderen die met de gemeten waarde. Een meting heeft altijd een bepaalde onnauwkeurigheid die we proberen te kwantificeren zodat we de werkelijke waarde kunnen insluiten in het interval: gemeten waarde ± onnauwkeurigheid.



In bovenstaand voorbeeld is de gemeten waarde 76,7 en de onnauwkeurigheid 0,5. De verwachting is dat de werkelijke waarde ergens in het interval [76,2 ... 77,2] zal liggen. Dit gearceerde interval noemen we het foutengebiedje.
Het is de bedoeling dat de werkelijke waarde binnen het opgegeven foutengebiedje zal liggen. Een vergissing, een slordig uitgevoerde meting, storende omstandigheden, een te klein geschatte onnauwkeurigheid, er zijn verschillende situaties denkbaar waarbij de werkelijke waarde niet "gevangen" wordt binnen het foutengebiedje. Dit moet vermeden worden.





Je zou de neiging kunnen krijgen om het foutengebiedje dan maar flink groot te kiezen, zodat de werkelijke waarde altijd gedekt is. Dit is echter in tegenspraak met de bedoeling van meten, namelijk om de meetwaarde zo nauwkeurig mogelijk vast te stellen.

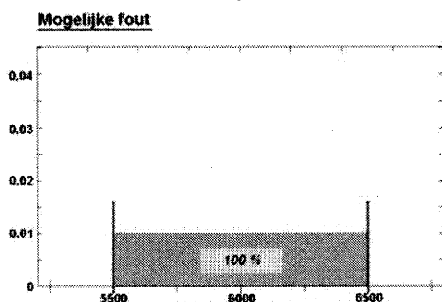
6.1.2 Honderd procent zekerheid?

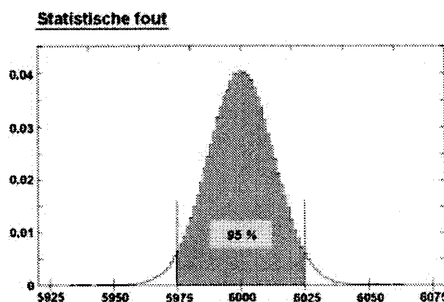
Uit de vorige paragraaf zou je kunnen afleiden dat de grenzen van een foutengebiedje heel erg strikt zijn: de werkelijke waarde moet met 100 procent zekerheid worden ingesloten. Je kunt het ook anders benaderen. We lichten dit toe met het probleem van de weg met bomen.



De weg met bomen.
Langs de weg staan 501 bomen. Ze zijn een beetje slordig geplant. De tussenafstand van twee bomen bedraagt 12 ± 1 meter.
Vraag: hoe lang is de weg.

Als we de werkelijke waarde met zekerheid willen insluiten, moet het antwoord luiden: 6000 ± 500 meter. Deze aanpak legt de nadruk op de *mogelijke fout*. "Mogelijk" betekent in dit verband maximaal mogelijk.
Er is ook een andere zienswijze, waarbij de nadruk ligt op de *statistische fout*. De redenering is als volgt. De kans dat alle bomen op 13 m van elkaar staan is praktisch nul, en dat geldt ook voor een tussenafstand van 11 m. De tussenafstand van twee bomen zal de ene keer iets meer dan 12 m en de andere keer iets minder dan 12 m zijn, waardoor de fouten (deels) tegen elkaar wegvallen. Een statistische simulatie leidt tot de uitkomst: 6000 ± 25 meter (95 % betrouwbaarheid).

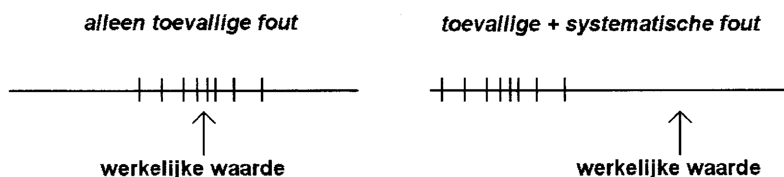




Het linkerplaatje beeldt de zienswijze van de mogelijke fout uit. Alleen de uiterste grenzen van het foutengebiedje zijn belangrijk, daartussen kan de werkelijke waarde overal met dezelfde waarschijnlijkheid liggen.
Het rechterplaatje geeft de zienswijze van mensen die met een statistisch oog naar foutengebiedjes kijken. De curve in het plaatje is een zogenaamde Gauss-kromme; het gearceerde deel onder de curve vertegenwoordigt 95 % van het totale oppervlak onder de curve. Het bijbehorende interval is het 95 *% betrouwbaarheidsinterval.*

6.1.3 Toevallige fout en/of systematische fout

Als we een meting herhalen, verwachten we in de uitkomst enige spreiding rond de werkelijke waarde. Er is sprake van een *toevallige fout*: de meetwaarde kan iets onder of iets boven de werkelijke waarde liggen en de afwijking ten opzichte van de werkelijke waarde zal elke keer iets meer of iets minder zijn. Dit is weergegeven in het linker plaatje.



In het rechter plaatje vertonen de meetwaarden ook enige spreiding, maar ligt het gemiddelde duidelijk onder de werkelijke waarde. Hier is sprake van een *systematische fout.* Als het bijvoorbeeld een tijdmeting betreft, kan de oorzaak een stopwatch zijn die te langzaam loopt. Omdat je de werkelijke waarde niet kent, kun je er dus behoorlijk naast zitten zonder het in de gaten te hebben!
Toevallige fouten laten zich statistisch uitmiddelen, systematische fouten niet.

6.1.4 Uitmiddelen van toevallige fouten: de factor √n

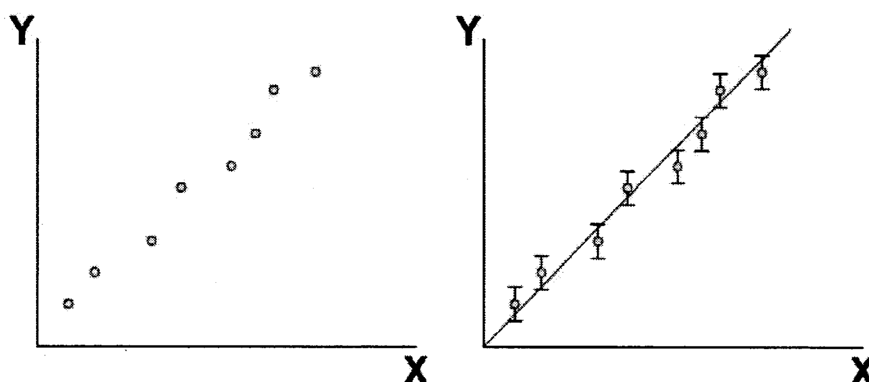
Toevallige fouten laten zich statistisch uitmiddelen. Een meting moet dan een aantal keren, onafhankelijk van elkaar, uitgevoerd worden. Het foutengebiedje rond het gemiddelde van de waarnemingen wordt kleiner naarmate het aantal meting toeneemt. Dit gaat met $\sqrt{n}$.
De betekenis van de factor $\sqrt{n}$ kan het duidelijkst geïllustreerd worden met een voorbeeld. Stel we hebben een grootheid die je kunt meten met een nauwkeurigheid van ± 5; het gaat om toevallige fouten. Als we meer metingen doen, zal de onnauwkeurigheid in een individuele meting nog steeds ± 5 zijn, maar de onnauwkeurigheid van het gemiddelde zal afnemen met een factor $\sqrt{n}$, waarbij n het aantal metingen is. Zie de tabel.

Aantal metingen *n*	Nauwkeurigheid gemiddelde
1	± 5
4	± 2,5
25	± 1
100	± 0,5
10.000	± 0,05

Een overvloed aan meetwaarden kan dus zinvol zijn om een nauwkeurig resultaat te bereiken.

6.1.5 Liggen de punten op een rechte lijn?

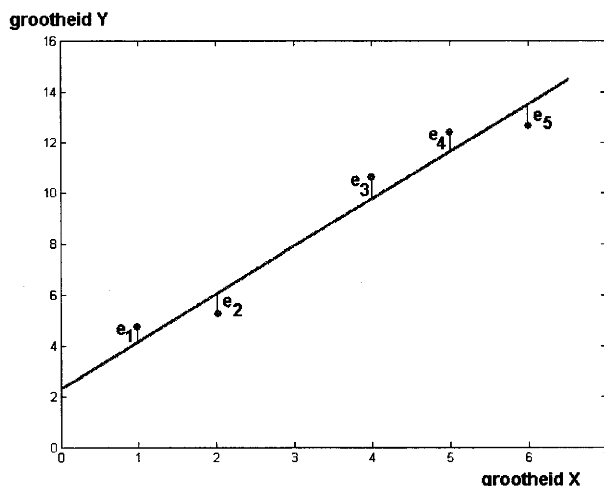
Stel: twee grootheden X en Y hebben, volgens de theorie, een rechtevenredig verband. Als we een serie meetwaarden uitzetten in een grafiek, verwachten we een rechte lijn door de oorsprong. De figuur hieronder toont een voorbeeld van een meetresultaat.



In het linker plaatje zijn de meetpunten sec weergegeven. Conclusie: deze punten liggen <u>niet</u> op een rechte lijn door de oorsprong.
Met behulp van een foutenbeschouwing zullen we toch proberen om recht te praten wat krom is. Elk meetpunt krijgt een foutengebiedje. Zie het rechter plaatje. Er gaat nu <u>wel</u> een rechte lijn door de foutengebiedjes en de conclusie is dat de punten toch op een rechte lijn liggen.
We vinden de best passende lijn met behulp van een kleinste kwadraten fit.

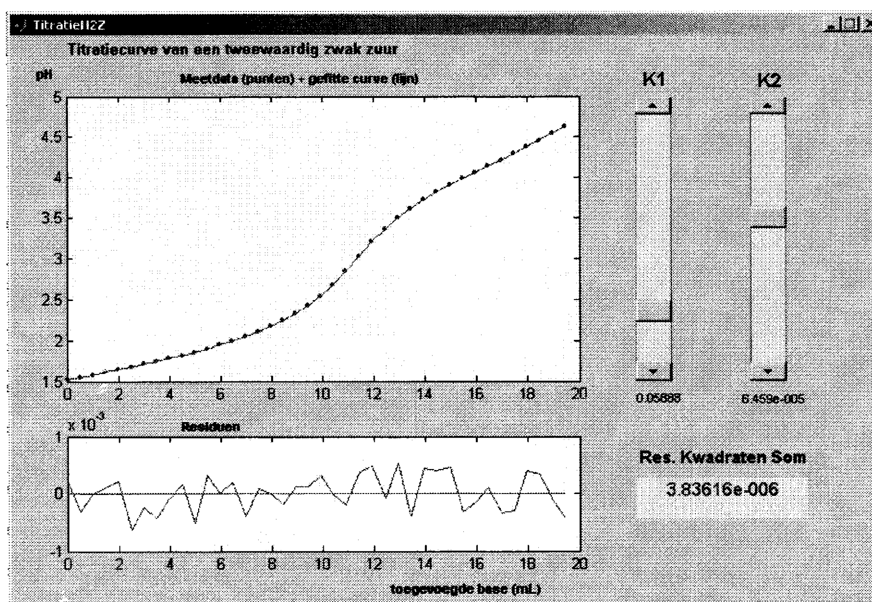
6.1.6 Kleinste kwadratenfit (rechte lijn)

Een serie punten die theoretisch een lineair verband hebben, zullen in de praktijk nooit exact op één lijn liggen. Hoe trek je dan de best passende rechte lijn door een serie punten? Als de onnauwkeurigheid in de meetpunten hoofdzakelijk bepaald wordt door toevallige fouten, gebruiken we de zogenaamde kleinste kwadraten methode.
De best passende rechte lijn volgens de kleinste kwadraten methode, wordt gevonden door de verticale afstandjes e_1, e_2, ... van de meetpunten tot de lijn te kwadrateren, op te tellen en te minimaliseren. Met andere woorden, de best passende rechte lijn is de lijn waarbij de som van die kwadraten het kleinst is. Zie onderstaande figuur.



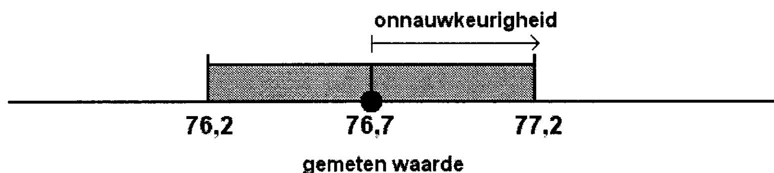
6.1.7 Kleinste kwadratenfit (algemeen)

Het toepassen van de kleinste kwadraten methode beperkt zich niet tot rechtlijnige verbanden. Uit de titratiecurve van een tweewaardig zwak zuur kunnen de reactieconstanten K1 en K2 bepaald worden door de meetwaarden te fitten met een theoretisch model. De parameters K1 en K2 worden handmatig ingesteld; de "beste" waarde is die waarbij de residuele kwadratensom minimaal is. Onderstaande figuur toont het grafisch interface voor deze fit.



6.2 Gemeten versus werkelijke waarde

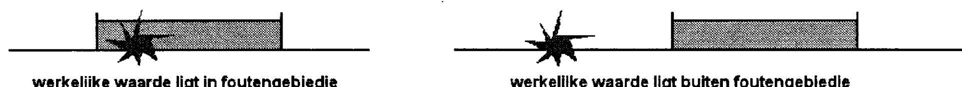
Meestal is de *"werkelijke waarde"* van een grootheid onbekend, we benaderen die met de gemeten waarde. Een meting heeft altijd een bepaalde onnauwkeurigheid die we proberen te kwantificeren zodat we de werkelijke waarde kunnen insluiten in het interval: gemeten waarde ± onnauwkeurigheid.



In bovenstaand voorbeeld is de gemeten waarde 76,7 en de onnauwkeurigheid 0,5. De verwachting is dat de werkelijke waarde ergens in het interval [76,2 ... 77,2] zal liggen.

6.2.1 Is de werkelijke waarde "gevangen"?

Het is de bedoeling dat de werkelijke waarde binnen het opgegeven foutengebiedje zal liggen. Een vergissing, een slordig uitgevoerde meting, storende omstandigheden, een te klein geschatte onnauwkeurigheid, er zijn verschillende situaties denkbaar waarbij de werkelijke waarde niet "gevangen" wordt binnen het foutengebiedje. Dit moet vermeden worden.



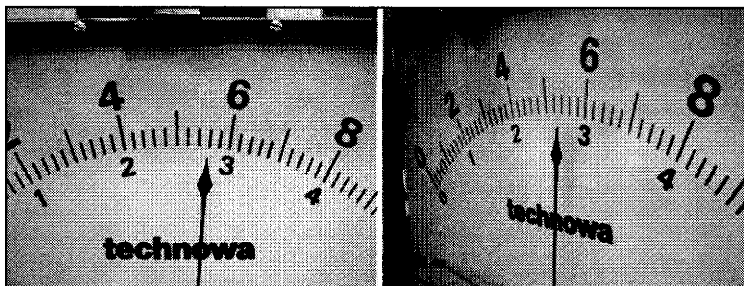
Men zou de neiging kunnen krijgen om het foutengebiedje dan maar flink groot te kiezen, zodat de werkelijke waarde altijd gedekt is. Dit is echter in tegenspraak met de bedoeling van meten, namelijk om de meetwaarde zo nauwkeurig mogelijk vast te stellen.
Er bestaan enkele routinematige handelingen die de kans verkleinen er volledig naast te zitten: de reproduceerbaarheid controleren, een ijkmeting uitvoeren en kritisch bezig zijn.
Reproduceerbaarheid. Vaak herhaalt men een meting om te kijken of het tweede resultaat binnen het foutengebiedje van het eerste valt. Vergissingen, slordigheden en storingen kunnen op deze manier beperkt worden.
IJkmeting. In situaties waarbij men met een nieuwe meetmethode en/of onbekende apparatuur werkt, voert men vrijwel altijd eerst een ijkmeting uit. Dat wil zeggen men doet een meting waarbij de werkelijke waarde van de grootheid wél bekend is en kijkt of deze binnen het foutengebiedje van de gemeten waarde valt.
Kritisch bezig zijn. Het kan geen kwaad om tijdens het voorbereiden en uitvoeren van een meting regelmatig de vraag te stellen "Ben ik goed bezig?"

6.2.2 Bronnen van onnauwkeurigheid

De waarnemer, het meetinstrument, de meetmethode en de meetomstandigheden kunnen er allemaal in meer of mindere mate toe bijdragen dat de meetwaarde afwijkt van de werkelijke waarde. Het streven is een zo nauwkeurig mogelijke meting, maar sommige bronnen van onnauwkeurigheid zijn onvermijdelijk. In bepaalde gevallen kan ervoor gecorrigeerd worden.
De waarnemer. Onnauwkeurigheden die voor rekening van de waarnemer komen, zijn allereerst de *afleesfouten* bij analoge meetinstrumenten. Een wijzer staat tussen twee streepjes, een vloeistofniveau bevindt zich tussen twee streepjes, enz. De waarnemer moet dan het laatste decimaal van de meetwaarde schatten.

Een tweede categorie zijn de zogenaamde *instelfouten* die optreden als de waarnemer eerst de meting moet instellen. Bij een tijdmeting: wanneer druk je op de stopwatch. Bij een meting met lenzen: wanneer is het beeld scherp. Bij een titratie: wanneer is de kleuromslag van de indicator. Afleesfouten en instelfouten zijn onvermijdelijk en moeten door de waarnemer worden geschat. We gaan er meestal van uit dat deze fouten toevallig van aard zijn.

Aflezen.
Een analoge meter moet loodrecht op de schaal worden afgelezen (l). Bij scheef aflezen heb je met parallax te maken (r), dit geeft een systematische fout.



Het meetinstrument. De grootste bron van onnauwkeurigheid van een meetinstrument is de ijking: hoe exact is het apparaat?. Een stopwatch kan iets te snel of te langzaam lopen, een voltmeter kan te weinig of te veel aangeven, enz. De hierdoor ontstane onnauwkeurigheden noemen we *ijkfouten*. De ijkfout van een meetinstrument wordt meestal door de fabrikant opgegeven. IJkfouten zijn systematisch van aard en treden zowel bij analoge als bij digitale instrumenten op. Digitale meetinstrumenten kennen geen afleesfout maar door de elektronica (denk aan A/D omzettingen) is er vaak een kleine onnauwkeurigheid in de weergegeven meetwaarde. Deze is meestal toevallig van aard en wordt door de fabrikant opgegeven.
De meetmethode. Hierbij gaat het om de vraag: meet je wat je denkt te meten? Een meetmethode die op het eerste gezicht correct lijkt, kan toch niet helemaal perfect zijn. Enkele voorbeelden. Bij een massabepaling zorgt de opwaartse kracht van de lucht op het voorwerp voor een te lage meetwaarde. Bij een weerstandsbepaling met behulp van een ampère- en voltmeter meet de ampèremeter ook de stroom door de voltmeter (of andersom). Bij een calorimeterproef treedt warmteverlies op. Bij een radioactiviteitmeting met een Geiger-Müller buis worden hoge waardes te laag gemeten vanwege de dode tijd van de telbuis. In deze voorbeelden gaat het om onnauwkeurigheden van systematische aard. Soms zijn deze fouten verwaarloosbaar ten opzichte van andere fouten. Anders moet er voor gecorrigeerd worden.
De meetomstandigheden. Het gaat om omstandigheden die de te meten grootheid beïnvloeden en omstandigheden die de waarnemer beïnvloeden. Geluidsmetingen worden beïnvloed door wind e.d. Een waarnemer die afgeleid wordt dient zich te realiseren dat zijn resultaten daardoor onbetrouwbaar worden. Afhankelijk van de situatie kan het gaan om onnauwkeurigheden van toevallige of systematische aard.

6.2.3 Fouten van toevallige en van systematische aard

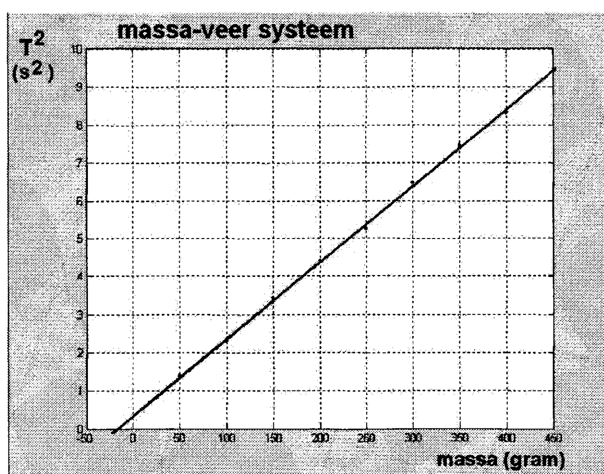
De afwijking tussen de gemeten en de werkelijke waarde kan *random* of *systematisch* van aard zijn. Random betekent dat de afwijking positief of negatief kan zijn en dat de grootte ervan zal variëren volgens de wetten van het toeval; in het Nederlandse taalgebied noemen we een onnauwkeurigheid die random van aard is een *toevallige fout*.
Systematisch betekent dat de afwijking tussen gemeten en werkelijke waarde steeds één kant op is: te groot of te klein. We spreken van een *systematische fout*.
Afleesfouten en instelfouten zijn in de regel toevallig van aard: de meetwaarde kan iets onder of iets boven de werkelijke waarde zitten en de grootte van de afwijking zal ook iets variëren als de meting herhaald wordt. Een waarnemer hoort bij het aflezen van de meter en het instellen van de meting geen systematische fouten te maken. Iemand zou bijvoorbeeld een analoge voltmeter systematisch te hoog kunnen aflezen door scheef te kijken. Dit scheef aflezen is van

invloed omdat er enige afstand zit tussen de wijzer en de schaalverdeling; we noemen dit *parallax*. Een instelfout van systematische aard zou bijvoorbeeld optreden als een ongeoefende tijdwaarnemer consequent te laat klokt.
Voor één concreet meetinstrument is de ijkfout systematisch van aard: de betreffende meter meet mogelijkerwijs te veel of te weinig en zal dat bij herhaling van de meting opnieuw doen. Belangrijk is om meters te gebruiken volgens de specificatie van de ijkcondities: sommige meters moeten horizontaal staan, bij een pipet moet een nalooptijd in acht worden genomen, enz. Bij digitale meters is meestal ook sprake van een kleine toevallige fout: het laatste digit is niet helemaal betrouwbaar vanwege A/D-omzettingen en fluctuaties in de elektronica.
De noodzaak van kritisch bezig zijn geldt vooral bij de meetmethode. Een waarnemer die de massa van een blokje hout bepaalt, dient zich te realiseren dat hij waarschijnlijk 1 ‰ te laag uitkomt vanwege de opwaartse kracht van de lucht. Waarnemers die zich dit niet realiseren, introduceren een systematische afwijking in hun meetwaarden die niet in rekening wordt gebracht. In veel gevallen kunnen de meetwaarden voor zo'n systematische afwijking gecorrigeerd worden. Maar het gebeurt ook wel dat men de systematische afwijking bewust incalculeert. Bijvoorbeeld bij een massa-veer systeem.

Massa-veer systeem. Men meet de trillingstijd bij verschillende massa's. Theoretisch geldt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}\,.$$

De trillende massa is eigenlijk de massa van het blokje plus de massa van het hangertje en misschien een deel van de veer. Als we voor *m* alleen de massa van het blokje nemen, maken we dus een systematische fout. In dit geval is dat geen probleem omdat we de fout bewust incalculeren. We lineariseren het verband door T^2 uit te zetten tegen *m*. De best passende rechte lijn gaat niet door (0,0).



Massa-veer systeem
De best passende rechte lijn snijdt de X-as in het punt m = -20
Hieruit leiden we af dat de systematische fout, dat wil zeggen de massa van het hangertje plus een deel van de veer, kennelijk 20 gram is geweest.
De helling van de lijn is 0,00201. Hieruit berekenen we voor de veerconstante
C = 1,96 kg/s^2.

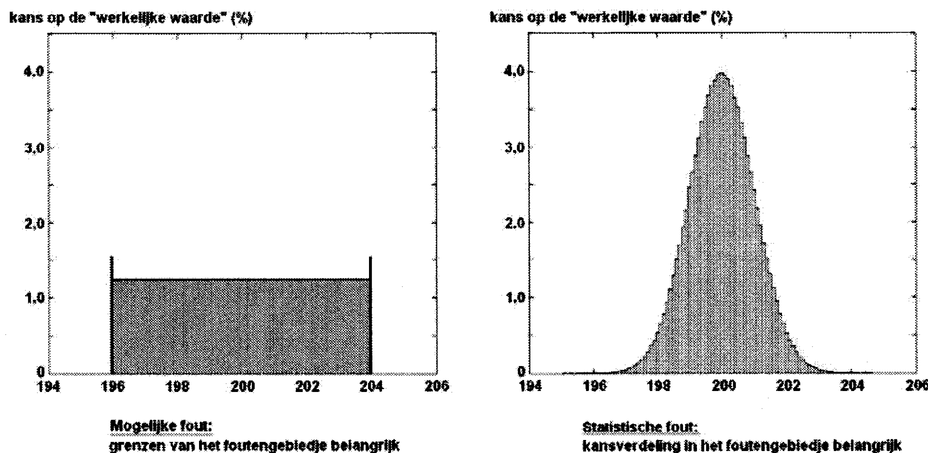
6.2.4 Externe of interne foutschatting

Het behoort bij de taak van de waarnemer om de onnauwkeurigheid, "de fout", in zijn meetwaarde aan te geven. Hij kan dit doen op grond van een *externe* foutschatting of een *interne* foutschatting.
Bij een externe foutschatting laat de waarnemer alle mogelijke foutenbronnen de revue passeren en kwantificeert zo goed mogelijk hun bijdrage. Hij kan kiezen voor een rigoureuze aanpak: alle fouten stapelen zich. Hij kan ook kiezen voor een afgewogen aanpak: bepaalde bijdragen verwaarlozen. Als in een bepaalde situatie sprake is van zowel een instelfout als een afleesfout, verwaarloos je meestal de kleinste van de twee; bij ouderwetse analoge volt- en ampèremeters verwaarloos je meestal de afleesfout ten opzichte van de ijkfout. De benaming extern komt van het feit dat de foutschatting gedaan kan worden buiten de meetwaarde om.

Bij een interne foutschatting verricht de waarnemer een serie metingen en bepaalt hij de onnauwkeurigheid uit de spreiding van de meetwaarden. De benaming intern slaat dus op het gebruik van daadwerkelijke meetwaarden bij de bepaling van de fout. Een interne foutschatting heeft alleen zin bij toevallige fouten. Systematische fouten worden niet zichtbaar met een interne foutschatting!
Soms is een combinatie van externe en interne foutschatting wenselijk. Een waarnemer kan een externe foutschatting doen van de toevallige fouten en vervolgens kijken of dat overeenkomt met de interne spreiding van een serie meetwaarden.

6.2.5 Visie op foutengebiedje: mogelijke fout of statistische fout

Bij het bepalen van de grootte van een foutengebiedje kunnen twee verschillende visies gehanteerd worden: die van de *mogelijke fout* of die van de *statistische fout*.
De eenvoudigste visie is die van de *mogelijke fout.* Met "mogelijke" wordt bedoeld de maximaal mogelijke fout. Hierbij wordt uitsluitend gelet op de uiterste waarden die het eindantwoord mogelijkerwijs zou kunnen hebben. Om de grenzen van het foutengebiedje te bepalen gaat men uit van de uiterste waarden die de meetwaarden kunnen hebben.
Bij de methode van de *statistische fout* gaat het om de kans dat de werkelijke waarde in een bepaald interval ligt. Veel gehanteerd is het zogenaamde 95 % betrouwbaarheids interval, een foutengebiedje waarin de werkelijke waarde met 95 % waarschijnlijkheid ligt. Bij de bepaling van het statistische foutengebiedje wordt gebruik gemaakt van kansberekening.
De essentie van de twee methodes kan op onderstaande manier gevisualiseerd worden.
In beide plaatjes is het eindantwoord van een (gefingeerde) bepaling 200. Links is dat weer-



gegeven met een mogelijke fout van 4: de werkelijke waarde ligt naar verwachting ergens in het interval [196 .... 204]. We geven de mogelijke fout aan met een delta: $\Delta x = 4$. De methode van de mogelijke fout richt zich op de uiterste grenzen van het foutengebiedje. De kansverdeling binnen het foutengebiedje is niet van belang, we hebben die vlak getekend om het verschil met de statistische methode goed te laten uitkomen.
In het rechterplaatje tonen we het foutengebiedje dat het resultaat zou kunnen zijn van de statistische methode. Het gaat dan om de kans de werkelijke waarde aan te treffen. De grenzen van het foutengebiedje zijn niet scherp en het verloop van de kansverdeling heeft een klokvorm. De breedte van de klok wordt gegeven door de zogenaamde *middelbare fout,* aangegeven met de letter s. In het plaatje is s gelijk aan 1. De kans dat de werkelijke waarde in het deelinterval [199 ... 201] ligt, bedraagt in dit geval ongeveer 68 %. Het 95 % interval is ongeveer twee keer zo breed [198 ... 202].

Het is duidelijk dat de methode van de statistische fout andere resultaten geeft die ook anders geïnterpreteerd moeten worden, dan de methode van de mogelijke fout.

6.3 Foutengebiedje van de meetwaarde

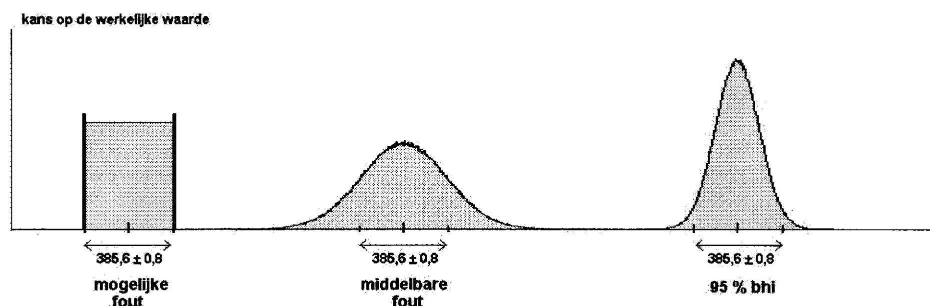
De waarnemer dient de onnauwkeurigheid, "de fout", in zijn meetwaarde aan te geven. Hij kan dit doen op grond van een *externe* foutschatting of een *interne* foutschatting. In dit hoofdstuk bespreken we hoe dat in zijn werk gaat. We beginnen echter met enkele algemene opmerkingen over de interpretatie en notatie van fouten.

6.3.1 Verwarring over welke fout

De simpele weergave f = (385,6 ± 0,8) Hz kan op verschillende manieren geïnterpreteerd worden als er verder niets bij vermeld staat. De waarde 385,6 vormt geen probleem, het gaat om de betekenis van 0,8. Welk foutengebiedje moet je erbij denken?

- 0,8 is de *mogelijke fout* in f en geeft de uiterste grenzen waarbinnen de werkelijke waarde zal liggen. Volgens de door ons te gebruiken notatie zouden we moeten schrijven $\Delta f = 0,8$.
- 0,8 is de *statistische fout* in f en moet geïnterpreteerd worden als de *middelbare fout* in f; de werkelijke waarde van f ligt met een waarschijnlijkheid van ongeveer 68 % in het opgegeven interval. Volgens de door ons te gebruiken notatie zouden we moeten schrijven $s_f = 0,8$. NB: de waarde van 68 % geldt alleen bij grote meetseries.
- 0,8 is de *statistische fout* in f en moet geïnterpreteerd worden als maat voor het *95 % betrouwbaarheidsinterval;* de werkelijke waarde van f ligt met een waarschijnlijkheid van ongeveer 95 % in het opgegeven interval. Hiervoor hebben we geen aparte symboolnotatie.

De drie verschillende betekenissen zijn worden in onderstaand plaatje gevisualiseerd.



6.3.2 Notatie

De mogelijke fout wordt met het symbool delta Δ weergegeven. De grootte van de mogelijke fout bij een meting wordt geschat of op grond van apparatuurgegevens bepaald.

> **Mogelijke fout.** Met een digitale meter (MetraHit 18S) wordt de stroom gemeten: I = 253,28 mA. De mogelijke fout is volgens de specificaties van de meter: ΔI = 0,2 % van de gemeten waarde + 10 digits = 0,61 mA. De werkelijke waarde van de stroomsterkte ligt dus in het interval 253,28 ± 0,61 mA. De bron van de fout is in dit geval een mogelijke onnauwkeurigheid in de ijking van de meter en mogelijke fluctuaties in de elektronica van het instrument.

De statistische fout geven we weer met de letter *s* als het de middelbare fout betreft. Deze volgt uit een interne foutschatting: de meting wordt een aantal malen herhaald en uit de spreiding van de data volgt de middelbare fout.

Middelbare fout. De hoeveelheid zoutzuur die nodig is om 100 mL van een onbekende vloeistof te neutraliseren wordt tien maal gemeten: 12.13, 11.08, 12.61, 12.74, 11.52, 13.51, 13.51, 12.47, 12.78, 12.65 mL. Hieruit berekenen we het gemiddelde V = 12.50 mL en de middelbare fout daarin s_V = 0.24 mL. De werkelijke waarde benodigde hoeveelheid zoutzuur ligt met 66 % waarschijnlijkheid in het interval 12.50 ± 0.24 mL. De waarschijnlijkheid bedraagt in dit geval 66 % (en geen 68 %) omdat de meetserie maar tien metingen omvat.

Het 95 % betrouwbaarheidsinterval heeft geen eigen symbool. Het is eveneens een weergave van de statistische fout en wordt berekend uit de middelbare fout. Daarbij is het aantal meetwaarden waarmee het gemiddelde en de middelbare fout berekend zijn, van groot belang.

Het 95 % bhi. Uit een serie van tien metingen hebben we bepaald V = 12.50 mL met als middelbare fout s_V = 0.24 mL. In de tabel met betrouwbaarheidsgrenzen (zie paragraaf 6.3.8) zoeken we de zogenaamde t-waarde op die hoort bij een meetserie van 10. We vinden t = 2.26 en het 95 % bhi wordt berekend met t × s_V = 2.26 × 0.24 = 0.54 mL. De werkelijke waarde van het volume ligt dus met 95 % waarschijnlijkheid in het interval 12.50 ± 0.54 mL.

Je kunt je afvragen wat voor zin het heeft om twee verschillende statistische fouten te gebruiken. Het antwoord is dat de middelbare fout snel kan worden uitgerekend en als tussenstap naar het 95 % bhi een eigen plaats heeft gekregen in de statistische verwerking. Binnen de natuurwetenschappen, maar ook binnen de alfa- en gammawetenschappen, hanteert men vaak het 95 % bhi als foutenmarge.

6.3.3 Afronding

Meetwaarden en de fout daarin worden niet afgerond als er nog verdere berekeningen mee worden uitgevoerd. Bij een eindantwoord, bijvoorbeeld de uitkomst van een berekening of een meetwaarde die als eindresultaat gepresenteerd wordt, is het aantal significante cijfers wel van belang. De fout in het eindantwoord wordt doorgaans geschreven met één significant cijfer en het aantal cijfers van de waarde van de grootheid wordt daaraan aangepast. Als de fout tussen 1,0 en 1,5 (of een 10-voud daarvan) ligt, mag hij tot twee cijfers worden afgerond. Het is niet gewenst om tussenantwoorden en de fout daarin af te ronden.

Afronden.

m = 1234,81 gram; Δm = 1,825 gram	m = 1235 ± 2 g (mogelijke fout)
f = 2507 Hz; s_f = 83 Hz	f = 2,51 ± 0,08 kHz (middelbare fout)
P = 3465873 W; 95%bhi = 139 kW	P = 3,47 ± 0,14 MWatt (95%bhi)

Elke fysische grootheid heeft in principe een fout, ook als die niet vermeld staat. Vooral in sommen wordt regelmatig de hand gelicht met nauwkeurigheid en significantie.

Significantie? Van 1 mol ideaal gas bedraagt het volume 3 L en de druk 5 bar. Bereken de temperatuur. Antwoord: met de ideale gaswet en R = 8,315 volgt: T = 180,39687 K.
De gedachte hierbij is dat iedereen wel weet dat de gebruikte waarden een bepaalde nauwkeurigheid hebben die anders is dan de notatie suggereert. In dit soort sommen gaat het meestal niet om nauwkeurigheden maar om de berekening. Het eindantwoord wordt dan met overdreven veel cijfers geschreven om de berekening te kunnen controleren.

Soms wordt de nauwkeurigheid van een grootheid impliciet gegeven: de laatste decimaal zou dan één meer of minder kunnen zijn. Echt zeker weet men dat echter niet.

Nooit exact. Met F = 12,25 N wordt (waarschijnlijk) bedoeld F = (12,25 ± 0,01) N. En of het de mogelijke fout, de middelbare fout of het 95 % bhi betreft, is helemaal onzeker.

6.3.4 Fout: absolute en relatieve notatie

Een grootheid X is gemeten of berekend met als uitkomst X = x ± Δx. De mogelijke fout Δx geeft aan dat we verwachten dat de werkelijke waarde van X met grote waarschijnlijkheid zal liggen in het interval van (x - Δx) tot (x + Δx).

Zekerheid. De gemeten snelheid van een auto bedraagt v = (83 ± 6) km/uur. Dat betekent dat de werkelijke waarde van de snelheid tussen 77 en 89 km/uur lag. Zo'n voorbeeld van onnauwkeurigheid heeft geleid tot veel discussie in de rechtbank; het resultaat is dat justitie een bekeuring uitschrijft op basis van 77 km/uur.

De waarde Δx is de mogelijke fout in de absolute notatie. Dat wil zeggen Δx heeft dezelfde eenheid als x en geeft de marges waarbinnen we verwachten dat de werkelijke waarde van X zal liggen. Men spreekt ook wel van absolute fout.

We gebruiken ook regelmatig het begrip relatieve fout.

De relatieve fout in x is: $\frac{\Delta x}{|x|}$, in de procentuele schrijfwijze: $\frac{\Delta x}{|x|} \times 100\%$ Als de grootheid x positief is, kunnen de absoluut-strepen worden weggelaten.

Relatieve fout. De uitkomst van een meting geeft T = (42,74 ± 0,08) s. De "absolute" fout in T bedraagt 0,08 s en de relatieve fout is 100 * 0,08/42,74 = 0,2 %.

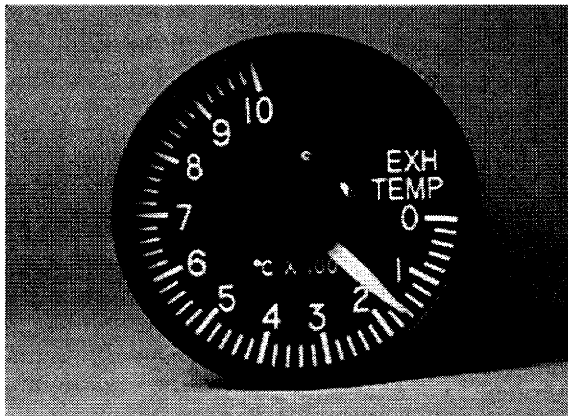
Ook bij statistische fouten wordt de absolute en de relatieve notatie gebruikt.

6.3.5 Externe foutschatting

Bij een externe foutschatting maakt de waarnemer een schatting van de nauwkeurigheid van zijn meting. Of hij bepaalt de nauwkeurigheid op grond van apparatuurgegevens. Meestal gaat hij uit van de mogelijke fout: Het opgegeven foutengebiedje sluit de werkelijke waarde in.

Afleesfout en instelfout. De hoogte van een paal wordt gemeten met een meetlint van 1,50 meter lang: h = 5,204 m. Het meetlint is goed geijkt zodat in dit geval de bronnen van onnauwkeurigheid het aflezen van de meetwaarde en het verschuiven (instelfout) van het lint zijn. Waarnemer A schat de mogelijke fout Δh = 3 × 1 mm voor het verschuiven + 0,5 mm voor het aflezen = 3,5 mm. Waarnemer B komt op Δh = 3 × 3 mm voor het verschuiven + 1 mm voor het aflezen = 10 mm. Het is als buitenstaander moeilijk te beoordelen wie van beiden gelijk heeft; het schatten van afleesfouten en instelfouten is soms erg subjectief.

Onervaren waarnemers vinden het vaak moeilijk om hun eigen nauwkeurigheid te schatten. Zowel wat betreft het aflezen van wijzers als het bepalen van fouten.



Aflezen. Op onderstaande foto staat een meter die de temperatuur van uitlaatgassen aangeeft. Welke waarde met mogelijke fout lezen we af?
De wijzer staat tussen de streepjes van160 en 180 graden, zekerheidshalve zouden we kunnen kiezen T = 170 ± 10 °C.
De punt van de wijzer zit echter ook nog binnen de eerste helft van het interval, dus onder de 170 graden. We zouden dus ook kunnen kiezen T = 165 ± 5 °C.
Maar de wijzer staat zichtbaar voorbij het streepje van 160, hetgeen pleit voor een verdere inperking: T = 165 ± 4 °C.
Waarschijnlijk heeft de meter ook nog een ijkfout die groter zal zijn dan de afleesfout, waardoor de mogelijke fout daardoor bepaald wordt. Ook moeten analoge meters loodrecht op de wijzer worden afgelezen om een systematische fout ten gevolge van parallax te voorkomen.

Instelfouten treden bijvoorbeeld op als er geklokt wordt: de stopwatch moet op het juiste moment worden ingedrukt.

Tijd klokken. Bij de slingerproef wordt de tijdsduur van twintig slingeringen gemeten: 34,65 s op een analoge stopwatch met een afleesfout van 0,05 s. Waarnemer A heeft wel eens iets gehoord over reactietijd en schat deze bij hemzelf op 0,25 s bij zowel het starten als het stoppen; dit geeft een instelfout van 0,50 s. De afleesfout kan verwaarloosd worden t.o.v. de instelfout. Waarnemer A geeft een mogelijke fout op van 0,50 s.
Waarnemer B vindt het verhaal van de reactietijd overdreven omdat je als waarnemer de slingerbeweging kunt volgen en precies ziet aankomen wanneer die in een bepaald punt is; er is geen sprake van een verrassing. Hij schat de instelfout op 0,05 s per keer en komt op een totale mogelijke fout van 0,15 s.
A en B zouden hun uitgangspunten proefondervindelijk kunnen toetsen. Bijvoorbeeld door de meting een flink aantal keren te herhalen en te kijken naar de spreiding van de meetwaarden. Een andere mogelijkheid is het klokken van een bekende tijdsduur, bijvoorbeeld de duur van 35 s op een klok met secondewijzer, en kijken hoever je er naast zit. Dat laatste kan ook een indicatie geven of de waarnemer systematisch te vroeg of te laat indrukt.
Beide waarnemers geven een mogelijke fout op. Je zou ook vanuit een statistische visie kunnen kijken. De drie bijdragen: reactietijd start, reactietijd stop en afleesfout kunnen onafhankelijk van elkaar beschouwd worden. Volgens de KOW-regel (kwadrateren – optellen – worteltrekken: zie bijlage 6.D) komen A en B op een 95% bhi van resp. 0,36 en 0,09 s.

In de handleiding van meetinstrumenten staan meestal specificaties over de nauwkeurigheid van de betreffende apparaten. Dan gaat het over ijkfouten en mogelijke fluctuaties in de aanwijzing.

Apparatuurgegevens. Op http://www.tnw.utwente.nl/onderwijs/practica/doc/app/ staan de handleidingen van op het het TNW-practicum gebruikte apparatuur.

Analog-digital multimeters
METRAHit 18S

Specifications METRA*Hit* 18S

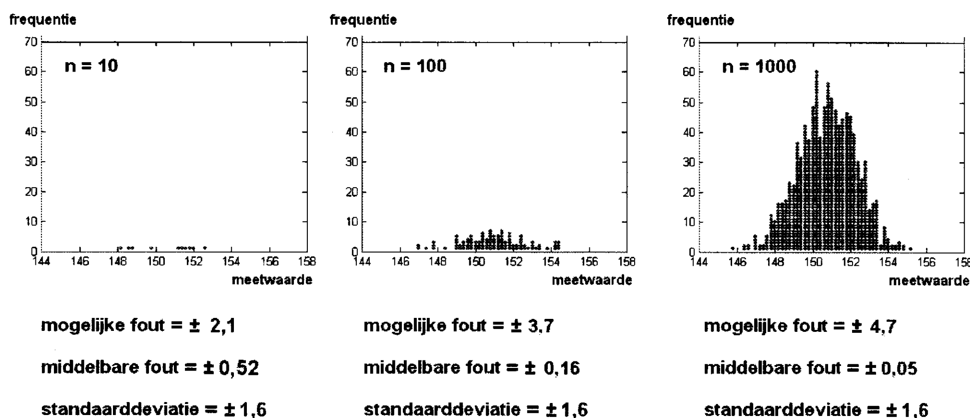
Measuring function	Measuring range METRAHit 18S	Resolution	Input impedance		Inherent deviation of the digital display ±... % of meas. val. + ... digits for ref. conditions		Overload capacity [3]		Measuring function
			—	~[1] ≂[1]	—	~[1] ≂[1]	Overload value	Overload duration	
V	300.00 mV	10 µV	> 10 GΩ	5 MΩ // < 40 pF	0.05 + 3; 0.05 + 20 [4]	0.5 + 30 (> 500 D)	1200 V DC AC RMS sinusoidal	cont.	V
	3.0000 V	100 µV	11 MΩ	1 MΩ // < 40 pF	0.05 + 3	0.3 + 30 (> 300 D)			
	30.000 V	1 mV	10 MΩ	1 MΩ // < 40 pF	0.05 + 3	0.3 + 30 (> 300 D)			
	300.00 V	10 mV	10 MΩ	1 MΩ // < 40 pF	0.05 + 3	0.3 + 30 (> 300 D)			
	1000.0 V	100 mV	10 MΩ	1 MΩ // < 40 pF	0.05 + 3	0.3 + 30 (> 300 D)			
dB	See table below		—	Same as with V~	—	± 0.5 dB [4]			dB
			Voltage drop, approx.						
			—	≂[1]	—	≂[1]			
mA	300.00 µA	10 nA	15 mV	15 mV	0.2 + 20	0.5 + 30 (> 300 D)	0.36 A	cont.	mA
	3.0000 mA	100 nA	150 mV	150 mV	0.2 + 10	0.5 + 30 (> 300 D)			
	30.000 mA	1 µA	30 mV	30 mV	0.05 + 10	0.5 + 30 (> 300 D)			
	300.00 mA	10 µA	300 mV	300 mV	0.2 + 10	0.5 + 30 (> 300 D)			
A	3.0000 A	100 µA	150 mV	150 mV	0.5 + 10	0.75 + 30 (> 300 D)	12 A [5]	5 min	A
	10.000 A	1 mA	400 mV	400 mV	0.5 + 10	0.75 + 30 (> 300 D)			

Samengevat. Bij een externe foutschatting let de waarnemer op afleesfouten, instelfouten, apparatuurgegevens, meetmethode en meetomstandigheden. Meestal geeft hij een foutengebiedje dat hoort bij de mogelijke fout, maar als er een aantal foutenbronnen zijn zou hij ook de statische fout kunnen opgeven (95% bhi).

6.3.6 Interne foutschatting

Bij een interne foutschatting verricht de waarnemer een serie metingen en bepaalt hij de onnauwkeurigheid uit de spreiding van de meetwaarden. De benaming intern slaat dus op het gebruik van daadwerkelijke meetwaarden bij de bepaling van de fout. Een interne foutschat-

ting heeft alleen zin bij toevallige fouten. Systematische fouten worden niet zicht-baar met een interne foutschatting!
Vanuit de optiek van de mogelijke fout leidt een interne foutschatting tot een volstrekt andere conclusie dan vanuit de visie van de statistische fout. Iemand die gefocust is op de mogelijke fout zal de grootste en de kleinste waarde van een meetserie als grenzen van zijn foutengebiedje nemen. Naarmate er meer meetwaarden komen zal de onderlinge spreiding verder toenemen en groeit dus de breedte van zijn foutengebiedje.
Bij iemand die zich richt op de statistische fout, zullen meer meetwaarden daarentegen een steeds kleinere statistische fout in het gemiddelde opleveren; zie de volgende paragraaf. Het doen van metingen met een toevallige fout kan met behulp van een random generator gesimuleerd worden. In onderstaand voorbeeld worden respectievelijk 10, 100 en 1000 metingen gedaan steeds van dezelfde grootheid. De spreiding en de frequentie van de meetwaarden is geplot.
De mogelijke fout is steeds de helft van de breedte van het foutengebiedje. Naarmate er meer metingen zijn, wordt de spreiding groter en groeit ook de mogelijke fout.
De middelbare fout, dat is de standaardafwijking in het gemiddelde, daalt echter met een factor √n. Hoe meer statistische gegevens er zijn hoe nauwkeuriger het resultaat.
Als we letten op de standaarddeviatie in een individuele meting, zien we dat die in elke situatie hetzelfde is; dat is ook te verwachten omdat deze bepaald wordt door de meting. Iemand zou dus die standaarddeviatie in een individuele meting via een interne foutschatting kunnen opsporen en bij toekomstige één-voudige metingen gebruiken als fout.



6.3.7 Interne foutschatting: de middelbare fout

Als we tien of twintig keren dezelfde grootheid meten, verwachten we steeds ongeveer hetzelfde resultaat. Elke meetwaarde zal binnen bepaalde grenzen *random* afwijken van de werkelijke waarde; volgens de wetten van het toeval kan die afwijking iets meer of iets minder zijn en positief dan wel negatief uitvallen. Deze gedachte is de basis van de zogenaamde interne foutschatting. Men bepaalt de fout in de meting niet op grond van (geschatte) meetonnauwkeurigheden als afleesfout en instelfout maar op grond van de spreiding van meetwaarden.
Van een serie meetwaarden $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ wordt het gemiddelde $\overline{x}_i$ bepaald. We noemen het gemiddelde van de meetwaarden voor het gemak x:

$$x = \overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bijna alle rekenmachines en rekenprogramma's hebben een routine om dit snel te doen. Vaak is er ook wel een routine om de standaardafwijking s te berekenen:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$$

De standaardafwijking s heeft betrekking op elk van de afzonderlijke meetpunten. Het is een statistische schatting van de nauwkeurigheid waarmee de metingen zijn verricht.
Als derde wordt de standaardafwijking in het gemiddelde s_x berekend. Dit noemen we de middelbare fout in de te bepalen grootheid:

$$s_x = s/\sqrt{n}$$

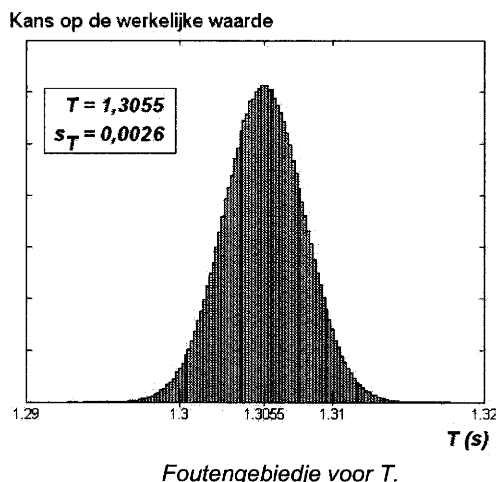
We zien dat bij n metingen de fout in het gemiddelde √n maal zo klein is als de fout in een enkele meetwaarde. Als resultaat van de meting geven we op x en s_x.
Het berekenen van de middelbare fout is een routinematige vaardigheid. Het is wel belangrijk te beseffen de middelbare fout uitgaat van een *random* spreiding in de meetwaarden. Systematische fouten mogen geen rol spelen. En de afzonderlijke metingen hebben onafhankelijk van elkaar plaatsgevonden, dat wil zeggen de waarnemer moet als het ware vergeten zijn wat de vorige uitkomst was.

Middelbare fout. Twintig personen meten onafhankelijk van elkaar met goed geijkte stopwatches de trillingstijd van een massa-veer systeem. De meetwaarde is steeds de tijd van 10T. De personen zijn goed getraind en klokken geen van allen systematisch te kort of te lang.
We berekenen drie statische grootheden: de gemiddelde waarde, de standaardafwijking van een afzonderlijke meting en de middelbare fout in het gemiddelde.

Meetwaarden 10T

13.072	12.831	12.932
13.054	13.138	13.021
12.943	13.084	13.231
12.879	13.205	13.272
13.099	13.071	13.272
13.113	13.078	13.103
13.095	12.983	

Het gemiddelde is 13,055 s en de standaardafwijking 0,117 s, te berekenen met gewone statistische routines. De standaardafwijking van 0,117 heeft betrekking op de nauwkeurigheid van elk van de meetpunten.
De standaardafwijking in het gemiddelde is een factor √20 kleiner: 0,117 / √20 = 0,0262 s.
Uitkomst 10T = 13,055 s; met als middelbare fout s_{10T} = 0,0262 s.
Voor de waarde voor 1T vinden we T = 1,3055 s met een middelbare fout s_T = 0,0026 s.



Foutengebiedje voor T.

Bij middelbare fout moet je denken aan een bijbehorende kansverdeling van de werkelijke waarde. De kans dat de werkelijke waarde in het interval 1,3055 ± 0,0026 s ligt bedraagt bij een meetserie van 20 ongeveer 67 %.

De kans dat de werkelijke waarde van de grootheid in het interval $[x\text{-}s_x \ldots x\text{+}s_x]$ ligt, bedraagt ongeveer 68 % voor voldoende grote meetseries; groot is in dit verband meer dan 25 meetwaarden. Voor kleinere meetseries neemt de waarde af. Zie de volgende paragraaf.

6.3.8 Hoe bepaal je het 95 % betrouwbaarheidsinterval

Het 95 % betrouwbaarheidsinterval (95 % bhi) zegt meer over de nauwkeurigheid van een meting of de uitkomst van een berekening dan de middelbare fout omdat de waarschijnlijkheid waarmee de werkelijke waarde is ingesloten groter is. Het 95 % bhi wordt berekend vanuit de middelbare fout met $t \times s$. Hierin is s de middelbare fout en t een getal dat afhankelijk is van de lengte van de meetserie. Voor grote series met meer dan twintig metingen is t ongeveer gelijk aan 2. Voor kleinere series neemt de waarde van t toe.
De onderstaande tabel geeft een opsomming van t-waarden bij verschillende groottes van de meetserie. De grootheid f in de eerste kolom is niet het aantal meetpunten, maar het aantal vrijheidsgraden, meestal gelijk aan het aantal meetpunten minus één.
De tabel geeft de t-waarden voor het 90 % bhi, het 95 % bhi en het 99 % bhi. De laatste twee kolommen geven omgekeerde informatie: hoe groot is het betrouwbaarheidsinterval als je uitgaat van één maal respectievelijk twee maal de middelbare fout.

Tabel met t-waarden en betrouwbaarheidsintervallen

f *)		t-waarden bij bhi van:				BHI (%)	
		90 %	95 %	99 %		x ± 1s	x ± 2s
1		6,314	12,706	63,657		50,00	70,48
2		2,920	4,303	9,925		57,74	81,65
3		2,353	3,182	5,841		60,90	86,07
4		2,132	2,776	4,604		62,60	88,39
5		2,015	2,571	4,032		63,68	89,81
6		1,943	2,447	3,707			
7		1,895	2,365	3,499			
8		1,860	2,306	3,355			
9		1,833	2,262	3,250		65,66	92,34
10		1,812	2,228	3,169			
11		1,796	2,201	3,106			
12		1,782	2,179	3,055			
13		1,771	2,160	3,012			
14		1,761	2,145	2,977			
15		1,753	2,131	2,947			
16		1,746	2,120	2,921			
17		1,740	2,110	2,898			
18		1,734	2,101	2,878			
19		1,729	2,093	2,861		67,01	94,00
20		1,725	2,086	2,845			
21		1,721	2,080	2,831			
22		1,717	2,074	2,819			
23		1,714	2,069	2,807			
24		1,711	2,064	2,797			
25		1,708	2,060	2,787			
30		1,697	2,042	2,750			
oneindig		1,645	1,960	2,576		68,27	95,45

*) **f** is het aantal vrijheidsgraden; meestal is dit gelijk aan het aantal meetwaarden minus een: f = n - 1. Dus bij 10 meetpunten is f gelijk aan 9. In het geval van een kleinste kwadraten berekening waarbij twee parameters bepaald worden (helling van de lijn en de asafsnede) is het aantal vrijheidsgraden eentje minder en geldt f = n - 2.

Van middelbare fout naar 95% bhi. In het voorbeeld van de vorige paragraaf vonden we een middelbare fout van 0,00262. Het betrof een meetserie van 20 metingen. Dus f = 20 - 1 = 19. De t-waarde van het 95 % bhi bedraagt volgens de tabel 2,093. Vermenigvuldigen levert op 0,00548. Dus de werkelijke waarde van de trillingstijd ligt met 95 % waarschijnlijkheid in het interval 1,3055 ± 0,0055 s.

6.4 Doorwerken van fouten

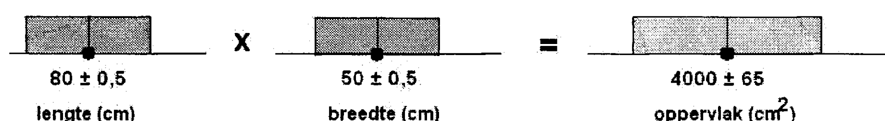
Als we een berekening uitvoeren met een meetwaarde, zal de fout doorwerken in het eindantwoord. Als voorbeeld nemen we een omtrekberekening met een mogelijke fout in de waarde voor de lengte en de breedte.

Doorrekenen van fouten. Gemeten is lengte = 83,4 ± 0,5 m en breedte = 51,7 ± 0,5 m, het gaat om mogelijke fouten. Omtrek = 2 × lengte + 2 × breedte = 270,2 m. Door lengte en breedte eerst minimaal in hun respectievelijke foutengebiedje en vervolgens maximaal te kiezen, krijgen we de spreiding in het eindantwoord. Minimale omtrek = 268,2 m; maximale omtrek 272,2 m. De spreiding bedraagt (272,2 – 268,2)/2 = 2 m. Een correcte weergave van het eindantwoord is omtrek = 270 ± 2 m.

In dit hoofdstuk behandelen we het doorwerken van de mogelijke fout en de statistische fout in berekeningen.

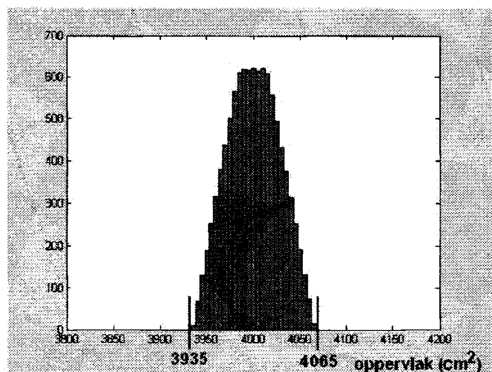
6.4.1 Doorwerken van de mogelijke fout

Bij de mogelijke fout richten we ons op de uiterste waarden die het eindantwoord van een berekening kan hebben. Als we een berekening uitvoeren met een meetwaarde, zal de mogelijke fout doorwerken in het eindantwoord. Er zijn twee rechtoe-rechtaan methodes om de mogelijke fout in het eindantwoord te bepalen: de *invulmethode* en de *histogrammethode*. Als voorbeeld nemen we een oppervlakteberekening van een rechthoek. Gemeten is lengte = 80,0 ± 0,5 cm en breedte = 50,0 ± 0,5 cm. Oppervlak = lengte × breedte = 4000 cm^2. Door lengte en breedte eerst minimaal in hun respectievelijke foutengebiedje en vervolgens maximaal te kiezen, krijgen we de spreiding in het eindantwoord: **de invulmethode.** We vinden 4065,25 en 3935,35. De spreiding rond de waarde van 4000 bedraagt 65 cm^2. Een correcte weergave van het eindantwoord is oppervlak = $(4,00 \pm 0,07) \times 10^3$ cm^2.
De berekening kan als volgt gevisualiseerd worden.



Als we uitgaan van een vlakke kansverdeling van de werkelijke waarde binnen de foutengebiedjes van lengte en breedte, verwachten we ook een vlakke kansverdeling binnen het eindantwoord. Dit laatste blijkt echter niet het geval te zijn. Om dit te laten zien, onderzoeken we de spreiding in het eindantwoord door rechtstreeks uitproberen: **de histogrammethode.** We nemen honderd waarden binnen het foutengebiedje van de lengte en honderd waarden binnen het foutengebiedje van de breedte. De combinatie levert tienduizend mogelijke antwoorden voor het oppervlak op. Deze kunnen we in een histogram uitzetten.

De 10.000 waardes van het oppervlak liggen binnen de grenzen 3935 en 4065 cm^2, zoals verwacht. De spreiding is echter niet vlak. Bij het werken met de mogelijke fout wordt daar echter geen aandacht aan besteed, de aangegeven grenzen worden als uiterste grenzen gezien en als zodanig gehanteerd.



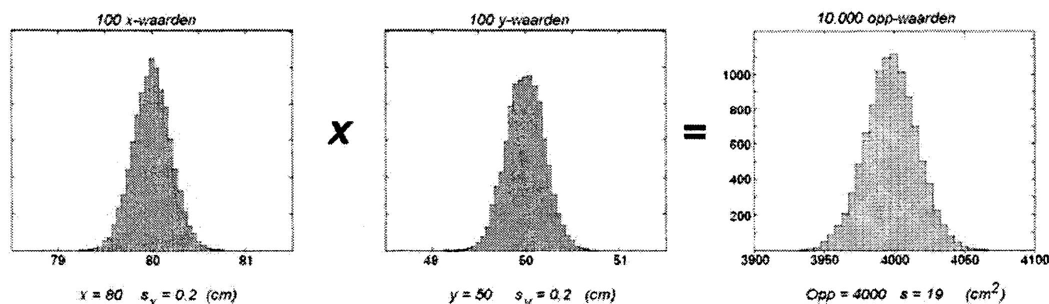
(Histogram: 10.000 waarden van het oppervlak zijn uitgezet met een klassenbreedte van 5 cm^2)

De histogrammethode is illustratief en werkt altijd. De invulmethode werkt niet als een bepaalde variabele op meer plaatsen in een formule voorkomt met tegengesteld effect.

In de praktijk zullen we de histogrammethode en de invulmethode niet vaak gebruiken, meestal berekenen we de mogelijke fout in het antwoord uit de mogelijke fouten in de meetwaarden met behulp van een formule.

6.4.2 Doorwerken van de statistische fout

Bij de statistische fout, of dat de middelbare fout is of het 95 % betrouwbaarheidsinterval, zijn we geïnteresseerd in de waarschijnlijkheid dat de werkelijke waarde in een bepaald interval ligt. Het gaat dus niet om de uiterste waarden en daarom is de invulmethode, zoals we besproken hebben in de vorige paragraaf, niet van toepassing. De histogrammethode levert wel een goed inzicht op wat er bij een berekening gebeurt.
Als voorbeeld opnieuw een oppervlakteberekening. De lengte en breedte van een rechthoek zijn statistisch bepaald. We gebruiken de histogrammethode. Lengte x = 80,0 cm met een middelbare fout van 0,2 cm; breedte y = 50,0 cm met een middelbare fout van 0,2 cm. Als we, Gaussisch verdeeld, *random* honderd waardes voor x en honderd voor y kiezen, geeft hun combinatie tienduizend waardes voor het oppervlak. De berekening is in onderstaande figuur weergegeven.



De uitkomsten voor het oppervlak blijken ook Gaussisch verdeeld. Het gemiddelde is, zoals verwacht, 4000 cm^2. De middelbare fout in de oppervlaktewaarden kan met een statistische routine bepaald worden en bedraagt ongeveer 19 cm^2. Essentieel in de beschouwing is dat de meetwaardes voor lengte en breedte onafhankelijk van elkaar gemeten zijn, zodat het effect van een iets te grote lengtewaarde statistisch gecompenseerd kan worden door een iets te kleine breedtewaarde.
Net als bij het doorwerken van de mogelijke fout zijn er formules om de doorwerking van de statistische fout te berekenen.

6.4.3 Doorwerkformules voor de fout

Als we een berekening uitvoeren met één gemeten grootheid, we berekenen bijvoorbeeld het volume van een bol waarvan de middellijn is gemeten, is er geen principieel verschil in de manier waarop de mogelijke fout en de statische fout doorwerken. Bij een berekening met twee of meer verschillende gemeten grootheden treedt er wel verschil op.
Kort gezegd komt het op het volgende neer. Bij de doorwerking van de mogelijke fout tellen we de bijdrage van de afzonderlijke grootheden op (stapelen) en bij de doorwerking van de statistische fout kwadrateren we de bijdrage van de afzonderlijke grootheden, tellen ze op en trekken daar de wortel uit (KOW-regel: zie bijlage 6.D).

Stapelen en KOW. We tellen drie lengtes op, elk met een fout van 5 m.
Doorwerking als mogelijke fout: 5 + 5 + 5 = 15 m
Doorwerking als statistische fout: $\sqrt{5^2+5^2+5^2} = 8{,}7$ m.

Het simpel optellen van de fouten, zoals in bovenstaand voorbeeld, geldt alleen als de bijbehorende grootheden ook opgeteld worden. Onderstaande tabel geeft een overzicht van de doorwerking van fouten in veel voorkomende berekeningen.

Tabel: Doorwerkformules voor de mogelijke en de statistische fout

Berekening	Mogelijke fout	Statistische fout
$z = k \times x$	$\Delta z = \lvert k \rvert \times \Delta x$	$s_z = \lvert k \rvert \times s_x$
$z = x^k$	$\frac{\Delta z}{\lvert z \rvert} = \lvert k \rvert \times \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$	$\frac{s_z}{\lvert z \rvert} = \lvert k \rvert \times \frac{s_x}{\lvert x \rvert}$
$z = \sqrt{x}$	$\frac{\Delta z}{\lvert z \rvert} = \frac{1}{2} \times \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$	$\frac{s_z}{\lvert z \rvert} = \frac{1}{2} \times \frac{s_x}{\lvert x \rvert}$
$z = \sin x$ *! radialen*	$\Delta z = \lvert \cos x \rvert \times \Delta x$	$s_z = \lvert \cos x \rvert \times s_x$
$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert}$	$s_z = \frac{s_x}{\lvert x \rvert}$
$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{\lvert z \rvert} = \Delta x$	$\frac{s_z}{\lvert z \rvert} = s_x$
$z = z(x)$	$\Delta z = \left\lvert \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\rvert \Delta x$	$s_z = \left\lvert \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\rvert s_x$
$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$
$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$	$s_z^2 = s_x^2 + s_y^2$
$z = x \times y$	$\frac{\Delta z}{\lvert z \rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y \rvert}$	$\left(\frac{s_z}{\lvert z \rvert} \right)^2 = \left(\frac{s_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{s_y}{y} \right)^2$
$z = x / y$	$\frac{\Delta z}{\lvert z \rvert} = \frac{\Delta x}{\lvert x \rvert} + \frac{\Delta y}{\lvert y \rvert}$	$\left(\frac{s_z}{\lvert z \rvert} \right)^2 = \left(\frac{s_x}{x} \right)^2 + \left(\frac{s_y}{y} \right)^2$
$z = z(x,y)$	$\Delta z = \left\lvert \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right\rvert \Delta x + \left\lvert \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \right\rvert \Delta y$	$s_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 s_y^2$

Bij goniometrische functies moet het argument in radialen!

6.4.4 Voorbeeldberekeningen in standaardgevallen

In deze paragraaf geven we een aantal voorbeeldberekeningen om de doorwerkformules toe te passen. Het gaat om standaardgevallen, zoals die in de tabel voorkomen.

a) Met een constante vermenigvuldigen. Bij het vermenigvuldigen met een constante geldt: de mogelijke fout wordt met dezelfde constante vermenigvuldigd en de statistische fout ook.

Constante. Ter bepaling van de dikte van een vel papier wordt een stapel van 500 vel gemeten: d = 4,25 ± 0,10 cm. Voor de dikte van 1 vel vinden we dus 0,085 ± 0,002 mm. Het maakt voor de berekening geen verschil of het hier om een mogelijke of een statistische fout gaat.

b) Optellen en aftrekken. Bij optellen en aftrekken geldt: de mogelijke fouten optellen. En: de statistische fouten kwadrateren, optellen en worteltrekken (KOW: zie bijlage 6.D).

Optellen en aftrekken. Voorbeeld 1. Bij de gemeentelijke vuilstort komt een auto twee maal op de weegbrug. Het "gewicht" is respectievelijk 1438 kg en 1321 kg. Beide metingen zijn met 1 % nauwkeurigheid als mogelijke fout. Hoeveel afval heeft de chauffeur gestort? Berekening: m = 1438 - 1321 = 117 kg en Δm = 14,38 + 13,21 = 27,59 kg. Antwoord: m = 1,2 ± 0,3 . 10^2 kg (mogelijke fout); de relatieve fout bedraagt maar liefst 25 %. Beide gewichtmetingen dragen ongeveer evenveel bij.

Voorbeeld 2. De afstand AD is in drie stukken gemeten: AB = (178,54 ± 0,25) m, BC = (2,2548 ± 0,002) km, CD = (582 ± 1,5) m. Het gaat om middelbare fouten op grond van grote meetseries bepaald. We kunnen dus de middelbare fout in AD berekenen door de fouten te kwadrateren en op te tellen en daaruit de wortel te trekken: $0{,}25^2 + 2^2 + 1{,}5^2 = 0{,}0625 + 4 + 2{,}25 = 6{,}31$; $\sqrt{6{,}31} = 2{,}5$. Hieruit volgt: AD = 3015 ± 3 m (middelbare fout). BC en CD dragen het meeste bij in de onnauwkeurigheid van het eindantwoord.

c) Vermenigvuldigen en delen. Bij vermenigvuldigen en delen geldt: de relatieve fouten optellen bij de mogelijke fout. En: de relatieve fouten kwadrateren, optellen en worteltrekken bij de statistische fout.

Vermenigvuldigen en delen. Voorbeeld 1. Van een blokje is de gemeten massa m = (56,63 ± 0,35) gram en het volume V = (41,2 ± 0,8) cm^3. Het betreft mogelijke fouten. Bereken de dichtheid en de mogelijke fout. Voor de dichtheid vinden we ρ = 1,3745146 g/cm^3. Om de Δρ te vinden, berekenen we eerst de relatieve fouten in m en V. Deze zijn 0,62 % in m en 1,94 % in V. De relatieve fout in ρ is dan 0,62 + 1,94 = 2,56 %. De mogelijke fout Δρ is dan 0,03518. Antwoord: ρ = (1,37 ± 0,04) g/cm^3. V draagt het meest bij in de onnauwkeurigheid.
Voorbeeld 2. Grootheid A is gemeten met een relatieve nauwkeurigheid van 3,1 % als statistische fout; het betreft hier het 95 % bhi. Grootheid B is eveneens statistisch gemeten en wel met een nauwkeurigheid van 1,1 % (95 % bhi). Hoe groot is de relatieve fout (95 % bhi) in het product A×B? Toepassen van de regel: $\sqrt{(0{,}031^2 + 0{,}011^2)} = 0{,}033$. Oftewel 3,3 %.

d) Machtsverheffen, kwadrateren en worteltrekken. Bij machtsverheffen geldt: de relatieve fouten optellen met de macht als coëfficiënt. Bij kwadrateren is de macht gelijk aan 2 en bij worteltrekken gelijk aan ½. Als het gaat om een berekening met één gemeten grootheid, geldt dit voor beide types van fouten.

Kwadrateren. Ter bepaling van g wordt een valproef gedaan. Een verticale afstand y = (38,77 ± 0,02) m wordt afgelegd in een tijd t = (2,821 ± 0,014) s. We verwaarlozen de luchtwrijving en gebruiken $y = \frac{1}{2}gt^2$. We vinden g = 9,743604 m/s^2. De relatieve fout in g is één maal de relatieve fout in y plus twee maal de relatieve fout in t.

$$\frac{\Delta g}{g} = 1 \times \frac{\Delta y}{y} + 2 \times \frac{\Delta t}{t} = 0{,}052\ \% + 2\ .\ 0{,}496\ \% = 1{,}0\ \%$$

Eindantwoord: g = (9,7 ± 0,1) m/s^2. Voor een nauwkeuriger antwoord zal met name de tijdmeting nauwkeuriger verricht moeten worden.

6.4.5 Gebruik van de partiële afgeleiden

Als een grootheid z berekend wordt uit de meetwaarden x ± Δx en y ± Δy dan geldt een algemene formule voor het doorwerken van de mogelijke fouten. De standaardgevallen die in de vorige paragraaf besproken zijn, zijn met deze algemene formule direct af te leiden. We beschouwen z als functie van x en y en schrijven z = z(x,y).

Voor de mogelijke fout Δz geldt:

$$\Delta z = \left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|\Delta x + \left|\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|\Delta y$$

Tussen haakjes staan de zogenaamde partiële afgeleiden. De partiële afgeleide van z naar x geeft aan hoe sterk een (kleine) verandering in de grootheid x doorwerkt in z. We gebruiken deze formule als de relatie tussen de grootheden niet tot de standaardgevallen behoort.

Gegeven de functie z waarvoor geldt:

$$z = x.\ln\frac{y}{5}$$

met de meetwaarden x = (33,2 ± 0,5) A en y = (7,5 ± 0,1) s. Het getal 5 is nauwkeurig bekend en heeft de eenheid seconde. Rekenen geeft: z = 13,46144 A.

$$\Delta z = \left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right|\Delta x + \left|\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right|\Delta y$$

$$\left|\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right| = \ln\frac{y}{5}$$

$$\left|\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| = x\cdot\frac{1}{y/5}\cdot 1/5 = \frac{x}{y}$$

Invullen geeft $\Delta z = 0{,}405 \times 0{,}5 + 4{,}427 \times 0{,}1 = 0{,}645$. Antwoord z = (13,5 ± 0,6) A; y draagt iets meer bij aan de onnauwkeurigheid in z dan x.

Voor de statistische fout geldt een overeenkomstige formule volgens het KOW-schema: kwadrateren, optellen en worteltrekken (zie bijlage 6.D).

6.4.6 Bijzondere situaties

De vraag is: wat moet je doen als de fouten van twee grootheden niet bij elkaar passen. Bijvoorbeeld als twee grootheden gecombineerd moeten worden waarvan de ene een mogelijke fout heeft en de andere een statistische fout. Of we krijgen te maken met twee middelbare fouten waarbij de achterliggende meetserie bij de ene grootheid veel korter was dan bij de andere.
Bij de bespreking van de verschillende situaties gaan we voor het gemak steeds uit van twee grootheden die opgeteld moeten worden: A = 50 ± 2 en B = 8 ± 1. We laten de eenheden weg, want het gaat om de manier van aanpak.

a) A heeft een mogelijke fout en B een middelbare fout (B grote meetserie).
We berekenen de middelbare fout in het antwoord. De mogelijke fout in A zetten we eerst om in een middelbare fout: $s_A = ⅔ \times \Delta A = 1{,}33$. Vervolgens KOW met 1,33 en 1. Resultaat 1,7 middelbare fout.
b) A heeft een mogelijke fout en B een middelbare fout (B kleine meetserie n = 5).
We berekenen het 95 % bhi in het antwoord. De fout in A laten we zo, 95 % of 100 % maakt weinig verschil. De middelbare fout in B vermenigvuldigen we met de t-waarde die bij n = 5 hoort (2,776) en we krijgen 2,776. Vervolgens KOW met 2 en 2,776. Resultaat 3,4 als 95 % bhi.
c) A heeft een middelbare fout (meetserie n = 9) en B een 95 % bhi.
We berekenen het 95 % bhi in het antwoord. We zetten de middelbare fout in A om naar een 95 % bhi (t = 2,306) en krijgen 4,612. Vervolgens KOW met 4,612 en 1. Resultaat 4,7 als 95 % bhi.
d) A heeft een middelbare fout (meetserie n = 12) en B heeft een middelbare fout (n = 4).
Het uitrekenen van de middelbare fout in het antwoord is niet zinvol omdat onduidelijk is welke t-waarde we daarna moeten gebruiken. We stappen dus meteen over naar de 95 % bhi's. De t-waarden zijn 2,201 voor A en 3,182 voor B. We gaan KOW doen met 4,402 en 3,182 en krijgen als resultaat 5,4 als 95 % bhi.
e) A en B hebben allebei een mogelijke fout zonder systematische component. We willen graag de fout in het antwoord met de statistische methode berekenen.
Als we beide foutwaarden lezen als 95 % bhi, zitten we aan de veilige kant. We berekenen het 95 % bhi in het antwoord met KOW: resultaat 2,2.

6.5 Verbanden grafisch onderzoeken (lineariseren)

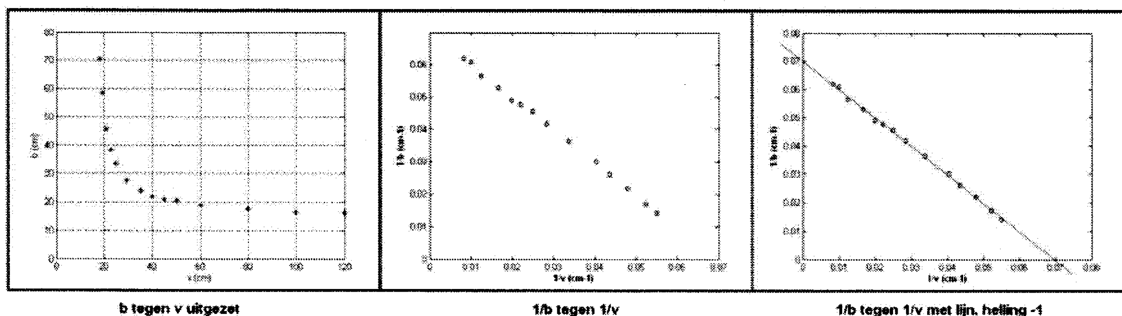
Met behulp van een formule kun je een nieuwe grootheid uitrekenen. De doorwerking van de fout in dat soort berekeningen is besproken in de vorige paragraaf.
In deze paragraaf beschouwen we een formule als een (theoretische) relatie tussen verschillende grootheden: lineair, kwadratisch, reciproque, logaritmisch, enz. In eerste instantie willen we weten of onze meetwaarden voldoen aan die theoretische relatie. Om de juistheid van de relatie te onderzoeken, tekenen we meestal een grafiek. Daarbij streven we naar een rechte lijn als grafiek en om dat te bereiken moeten we de relatie tussen de gemeten grootheden eerst lineariseren. Het zal zelden voorkomen dat een reeks meetpunten exact op een rechte lijn ligt, dus ook hier spelen de foutengebiedjes een grote rol bij de beoordeling of de veronderstelde relatie wel of niet aanwezig is.
Een rechte lijn heeft een helling en een plek waar hij de Y-as snijdt. De waarde van de helling en van de asafsnede kunnen met behulp van de grafiek bepaald worden en worden gebruikt voor verdere berekeningen.

6.5.1 Relatie in beeld: lenzenformule

De lenzenformule geeft een relatie tussen de voorwerpsafstand v en de beeldafstand b bij een bepaalde brandpuntsafstand f. Voor een bepaalde lens is f een constante.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{v}+\frac{1}{b}$$

Ter bepaling van f zou men kunnen volstaan met één meting van v en b. En de formule gebruiken als rekenformule. Interessanter is het om een serie metingen te verrichten, waarbij de waarden van v en b variëren, om eerst de theoretische relatie tussen beiden te verifiëren. In de linker van onderstaande grafieken is b tegen v uitgezet. Die grafiek geeft hooguit kwalitatieve informatie: b neemt af als v toeneemt en de grafiek ziet er hyperbool-achtig uit.



b tegen v uitgezet | 1/b tegen 1/v | 1/b tegen 1/v met lijn, helling -1

In de middelste grafiek zijn de reciproque waarden uitgezet: $1/b$ tegen $1/v$. De punten liggen redelijk op een dalende rechte lijn. Als we de lenzenformule iets anders schrijven

$$\frac{1}{b}=-\frac{1}{v}+\frac{1}{f}$$

volgt daaruit inderdaad een lineair verband tussen $1/b$ en $1/v$. De richtingscoëfficiënt zou -1 moeten zijn. In de rechtergrafiek trekken we een rechte lijn met helling -1 zo goed mogelijk door de punten en de fit ziet er heel behoorlijk uit. De vraag “Voldoen onze metingen aan de theoretische relatie?” kan echter pas beantwoord worden als we meer weten over de nauwkeurigheid van de metingen: de meetpunten liggen namelijk niet exact op één lijn. De nauwkeurigheid geven we aan door middel van foutengebiedjes in de grafiek.

Als de vraag dan met "ja" wordt beantwoord, kunnen we overgaan naar stap twee: welke informatie verschaft de grafiek nog meer? In dit geval is de verticale as-afsnede gelijk aan $1/f$; we kunnen dus grafisch de brandpuntsafstand bepalen.
Als het antwoord op de vraag "nee" is, kunnen we niet verder want het is een beetje raar om een theoretische relatie (formule) te gebruiken die kennelijk niet geldt.

6.5.2 Lineariseren

Het voorbeeld van de lenzenformule, dat in de vorige paragraaf aan de orde was, geeft aan dat een lineair verband tussen grootheden het gemakkelijkst te beoordelen is. Een rechte lijn is eenvoudig als rechte lijn te herkennen. Bij andere curven die bijvoorbeeld een kwadratisch, exponentieel of wortelverband aangeven, is dat lastiger. Om die reden zetten we gemeten grootheden bij voorkeur zo tegen elkaar uit dat er een lineair verband zichtbaar wordt. In veel gevallen moeten daartoe de meetwaarden omgerekend worden. Dit heet *lineariseren*.
Als de relatie tussen de gemeten grootheden expliciet bekend is, levert het lineariseren weinig problemen op. Bijvoorbeeld radioactief verval: de activiteit van een preparaat neemt exponentieel af met de tijd. Het ligt voor de hand om dan op de X-as de tijd te zetten en op de Y-as de logaritme van de activiteit. De halveringstijd is te bepalen uit helling van de lijn.
Als de relatie tussen de gemeten grootheden minder direct in het oog springt, zoals in het voorbeeld van de lensformule met v en b, is enig nadenken vereist bij het lineariseren.
In de onderstaande tabel gaan we steeds uit van een serie metingen van de grootheden x en y waartussen een bepaald verband zou moeten bestaan. Voor een aantal verbanden wordt de meest voor de hand liggende linearisering gegeven; p en q zijn constanten.

Tabel: Lineariseren van veel voorkomende relaties

Meting	verband	voorbeeld	X-as	Y-as	helling	as-afsnede
{x, y}	y = px	wet van Ohm: $U=IR$	X	y	p	gaat door (0,0)
{x, y}	y x = p	wet van Boyle: pV=constant	1/x	y	p	gaat door (0,0)
{x, y}	y = px² → $y = px^2$	versnelde beweging: $x=\frac{1}{2}gt^2$	x^2	y	p	gaat door (0,0)
{x, y}	$y = p\sqrt{x}$	math. slinger: $T=2\pi\sqrt{l/g}$	X	y^2	p^2	gaat door (0,0)
{x, y}	y = p ln(qx)		ln(x)	y	p	p ln(q)
{x, y}	y = p exp(qx)	radioactief verval: $A=A_0e^{-\lambda t}$	X	ln(y)	q	ln(p)
{x, y}	$y = p\,x^q$	warmtestraling: $P=A\sigma\varepsilon T^4$	ln(x)	ln(y)	q	ln(p)
{x, y}	1/y + 1/x = p	lenzenformule: $1/v+1/b=1/f$	1/x	1/y	-1	P
{x,y}	$\frac{\sin y}{\sin x} = n$	breking: $n = \sin i/\sin r$	sin x	sin y	n	gaat door (0,0)

Als de meetpunten na omrekening in een grafiek worden gezet, moet beoordeeld worden of ze op een rechte lijn liggen. Dat zal nooit exact zo zijn. Het oordeel hangt dus af van de foutengebiedjes die bij de meetpunten horen. We bespreken dit in de volgende paragrafen.

De rechte lijn die het gelineariseerde verband grafisch weergeeft, moet soms om theoretische redenen door de oorsprong gaan.

6.5.3 Foutengebiedjes in de grafiek

Als een meetwaarde moet worden gekwadrateerd of anderszins omgerekend om het verband met een andere grootheid te lineariseren, is het noodzakelijk om ook het bijbehorende foutengebiedje mee te nemen. De nieuwe foutengebiedjes kunnen dan in de grafiek erbij getekend worden. Voor de mogelijke fout geldt:

$$\Delta(\text{nieuw}) = |(\text{afgeleide})| \times \Delta(\text{meet}).$$

De afgeleide moet toegepast worden op de omrekenformule. Zie onderstaande tabel.
Voor statistische fouten geldt hetzelfde.

Tabel: Omrekenen van foutengebiedjes (mogelijke fout)

Gemeten waarde x	Grafiekwaarde na linearisering			
	omrekening		mogelijke fout	
$x = 18,5 \pm 0,4$	x^2	342,25	$2x\ \Delta x$	14,8
$x = 18,5 \pm 0,4$	x^3	6331,625	$3x^2\ \Delta x$	410,7
$x = 18,5 \pm 0,4$	$\sqrt{x}$	4,301	$\frac{1}{2}\ 1/\sqrt{x}\ \Delta x$	0,093
$x = 18,5 \pm 0,4$	$1/x$	0,054054	$1/x^2\ \Delta x$	0,001169
$x = 18,5 \pm 0,4$	$1/x^2$	0,002922	$2/x^3\ \Delta x$	0,000126
$x = 18,5 \pm 0,4$	ln (x)	2,91777	$1/x\ \Delta x$	0,02162
$x = 18,5 \pm 0,4$	exp (x)	1,0825E8	exp (x) Δx	4,33E7
$x = 18,5 \pm 0,4$ (°)	sin (x)	0,3173	cos (x) Δx	0,0066 (!)
$x = 18,5 \pm 0,4$ (°)	cos (x)	0,9483	sin (x) Δx	0,0022 (!)

In de tabel wordt de omrekening steeds toegelicht met een getalvoorbeeld. Speciale aandacht verdienen goniometrische omrekeningen vanwege de radialen.
Als de meetwaarden een statistische fout hebben, verloopt de berekening hetzelfde. De uitkomst van de foutberekening heet dan "statistische fout" en kan nader gespecificeerd worden als middelbare fout of 95 % bhi.

6.5.4 Wel een lijn of geen lijn?

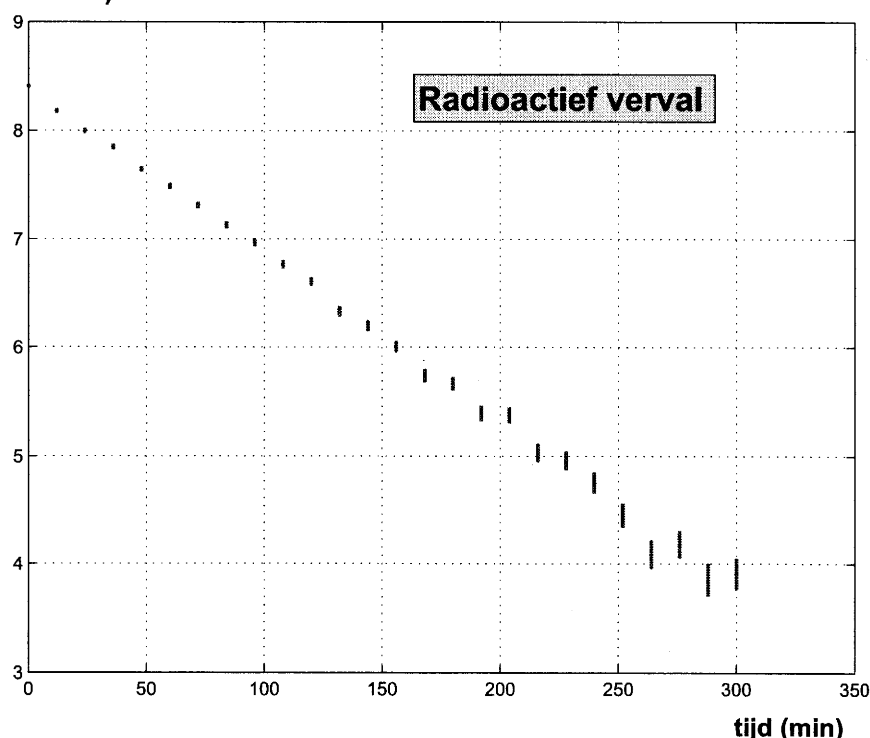
De linearisering is gebeurd. De meetpunten staan met foutengebiedjes in een grafiek. Liggen ze op een rechte lijn of niet? Als er een lijn te trekken is die door alle foutengebiedjes gaat, is het antwoord: ja! Maar daarbij moeten we wel rekening houden met eventuele eisen die het theoretische verband stelt: moet de as-afsnede de waarde nul hebben of niet, moet de helling een bepaalde waarde hebben? We bespreken dit aan de hand van een voorbeeld.

Data fitten. De activiteit van een radioactief preparaat wordt gemeten als functie van de tijd.
Tijd = [0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180, 192, 204, 216, 228, 240, 252, 264, 276, 288, 300] minuten.

Activiteit = [4483, 3568, 2973, 2571, 2099, 1793, 1501, 1249, 1061, 869, 739, 560, 490, 405, 311, 288, 220, 217, 154, 143, 116, 86, 60, 65, 47, 50] counts.
Het verwachte theoretische verband is een dalende e-macht.

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{waarbij} \quad \lambda = \frac{1}{t_{1/2}} \ln 2$$

Om dit verband te verifiëren zetten we de logaritme van de activiteit LN (Activiteit) uit tegen de tijd. We verwachten een dalende rechte lijn.
De mogelijke fout in de tijdmeting schatten we op 0,5 minuten.
De gemeten activiteit komt op een digitaal display en kan foutloos worden afgelezen. Toch kennen we een mogelijke fout toe aan de meetwaarde omdat radioactief verval een kansproces is. Voor de mogelijke fout nemen we 1 × √ activiteit. Deze mogelijke fout rekenen we om naar de waarde voor ln (Activiteit). Het resultaat wordt geplot.

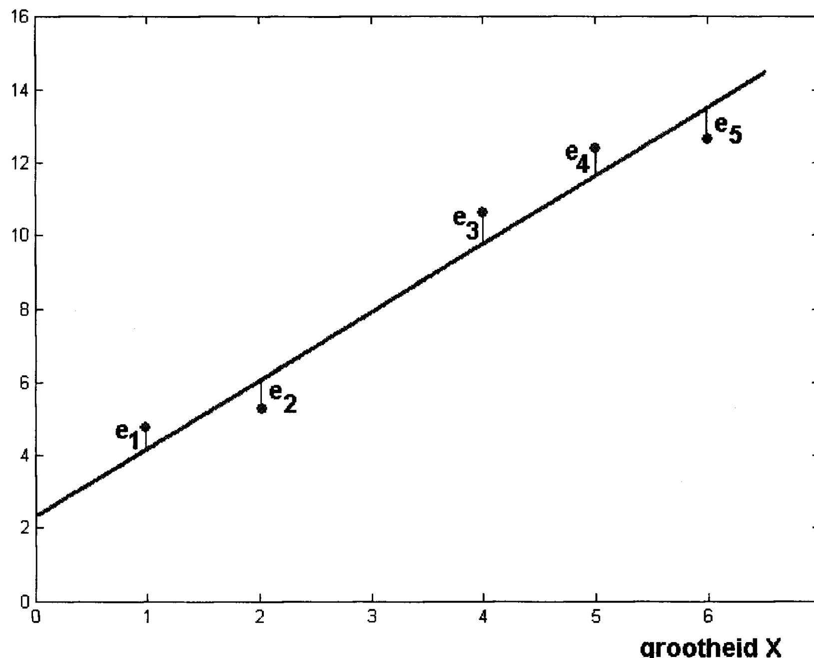


Theoretisch zijn er geen eisen aan een eventuele rechte lijn: hij hoeft niet door (0,0) te gaan en heeft geen voorgeschreven helling.
We kunnen dus proberen een rechte lijn te tekenen die door alle foutengebiedjes gaat. Ga na dat dat redelijk lukt. Conclusie: onze meetwaarden voldoen aan het theoretische model van radioactief verval en kunnen gebruikt worden om uit de helling van de lijn de halveringstijd te bepalen. We doen dit via de methode van de kleinste kwadraten met de MATLAB functie fmlsq.
De best passende rechte lijn heeft een helling van - 0,01537 ± 0,00012 (middelbare fout).
Hieruit berekenen we de halveringstijd $t_{½}$ = 45.0974 met als middelbare fout s = 0,3521.
Eindantwoord $t_{½}$ = 45.1 ± 0,4 min (middelbare fout).

Het verwerken van meetwaarden, het maken van grafieken, het lineariseren en het bepalen van de best passende rechte lijn doen we meestal met de computer.

6.5.5 Kleinste kwadraten fit

Een serie punten die theoretisch een lineair verband hebben, zullen in de praktijk nooit exact op één lijn liggen. Hoe trek je dan de best passende rechte lijn door een serie punten? Hoe bepaal je de helling en de as-afsnede van die lijn? Hoe bepaal je de fout in de waarde van de helling en van de as-afsnede?
Als de onnauwkeurigheid in de meetpunten hoofdzakelijk bepaald wordt door toevallige fouten, gebruiken we de zogenaamde kleinste kwadraten methode. Deze methode wordt in deze paragraaf besproken. Als de onnauwkeurigheid in de meetpunten hoofdzakelijk bepaald wordt door systematische fouten, gebruiken we de methode van de maximale/minimale helling. Deze methode wordt in de volgende paragraaf besproken.
De best passende rechte lijn volgens de kleinste kwadraten methode, wordt gevonden door de verticale afstandjes e_1, e_2, ... van de meetpunten tot de lijn te kwadrateren, op te tellen en te minimaliseren. Met andere woorden, de best passende rechte lijn is de lijn waarbij de som van die kwadraten het kleinst is. Zie onderstaande figuur.



Meetwaarden fitten met een kleinste kwadraten berekening zit standaard in veel rekenpakketten. De kleinste kwadraten methode voor een rechte lijn staat ook bekend als "lineaire regressie". Als output van de berekening worden de helling en de as-afsnede van de best passende rechte lijn gegeven. Soms de vergelijking van de lijn.
Wij zijn ook geïnteresseerd in de nauwkeurigheid van de gevonden waarden en daarvoor is binnen MATLAB ten behoeve van het TNW-practicum de routine **mflsq** ontwikkeld. Deze geeft de beste lijn met de middelbare fout in de helling en de as-afsnede. Bij het omrekenen van de middelbare fout naar een 95 % bhi moet het aantal vrijheidsgraden waarmee de bijbehorende t-waarde bepaald wordt, als het aantal meetpunten minus twee genomen worden omdat vanuit de meetpunten al twee grootheden bepaald zijn: de helling en de as-afsnede.
De routine **mflsq** biedt ook de mogelijkheid om de lijn door de oorsprong te laten gaan. Ook is het mogelijk om een lijn met een vaste helling door de meetpunten te trekken.

De kleinste kwadraten methode levert alleen zinvolle informatie over de helling en de as-afsnede als de spreiding van de meetpunten een gevolg is van toevallige fouten in de Y-waarden. Dit betekent dat de X-waarden een betrekkelijk kleine onnauwkeurigheid hebben en dat de Y-waarden alleen een toevallige en geen systematische fout hebben.
Bijzondere aandacht verdient het gebruik van gewichten, zie volgende paragraaf.
De onnauwkeurigheid in de helling en de as-afsnede is, net als bij de middelbare fout, omgekeerd evenredig met $\sqrt{n}$. Meer punten betekent een nauwkeuriger antwoord.

6.5.6 Gebruik van gewichten

De routine **mflsq** biedt een mogelijkheid die andere rekenprogramma's in de regel niet hebben: aan elk meetpunt kan een gewicht toegekend worden, relatief ten opzichte van de andere meetpunten. Een groot gewicht betekent dat het punt zwaar meetelt in de kleinste kwadraten berekening. Het gebruik van gewichten is noodzakelijk als de meetpunten ongelijke (verticale) foutengebiedjes hebben. Die situatie ontstaat bijvoorbeeld als de Y-waarden in de grafiek omgerekend zijn uit de meetwaarden om het verband te lineariseren. Het is gebruikelijk om de reciproque van de fout in de Y-waarde als gewicht te nemen.

$$\text{Gewicht } \mathbf{w} = 1 / \mathbf{\Delta Y}$$

Het gebruik van gewichten is niet nodig als alle meetpunten (ongeveer) dezelfde onnauwkeurigheid hebben.

6.5.7 Guggenheim

Het lineariseren van het verband tussen twee grootheden is handig omdat een rechte gemakkelijk te trekken en te beoordelen is. En het toepassen van de kleinste kwadratenfit is eenvoudig omdat je een rechte lijn kunt trekken.
Dit heeft er toe geleid dat men ook voor complexere relaties op zoek is gegaan naar een manier om die te lineariseren. Een mooi voorbeeld is de relatie

$$\alpha_t = \alpha_\infty + (\alpha_0 - \alpha_\infty)\exp(-kt)$$

die je tegenkomt bij het verloop van bepaalde chemische reacties en bij het afkoelen van een voorwerp. De grootheid α wordt gemeten als functie van de tijd t. Bij de chemische reactie kan α de polarisatiehoek van het reactiemengsel zijn en bij afkoeling de temperatuur.
Het simpel lineariseren van de relatie haalt α_o en α_∞ in de nieuwe Y-waarde. Dit is ongewenst omdat een toevallige fout in α_o en α_∞ nu doorwerkt als systematische fout in de Y-waarden.
Guggenheim heeft een ingenieuze manier bedacht om het probleem van α_o en α_∞ te omzeilen.
Hij neemt steeds twee α-waarden die op een vaste tijdsafstand Δt van elkaar zitten. Het verschil ertussen daalt volgens dezelfde e-macht en de logaritme levert een lineair verband op:

$$\begin{aligned}
&\alpha_t = \alpha_\infty + (\alpha_0 - \alpha_\infty)\exp(-kt)\\
&\alpha_{t+\Delta t} = \alpha_\infty + (\alpha_0 - \alpha_\infty)\exp\{-k(t+\Delta t)\}\\
&\alpha_{t+\Delta t} - \alpha_t = (\alpha_0 - \alpha_\infty)[\ \exp\{-k(t+\Delta t)\} - \exp\{-kt\}\ ]\\
&\alpha_{t+\Delta t} - \alpha_t = (\alpha_0 - \alpha_\infty)\times(\exp(-k\Delta t) - 1)\times\exp(-kt)\\
&\ln(\alpha_{t+\Delta t} - \alpha_t) = -kt + const.
\end{aligned}$$

Toch heeft ook de Guggenheim methode nadelen:

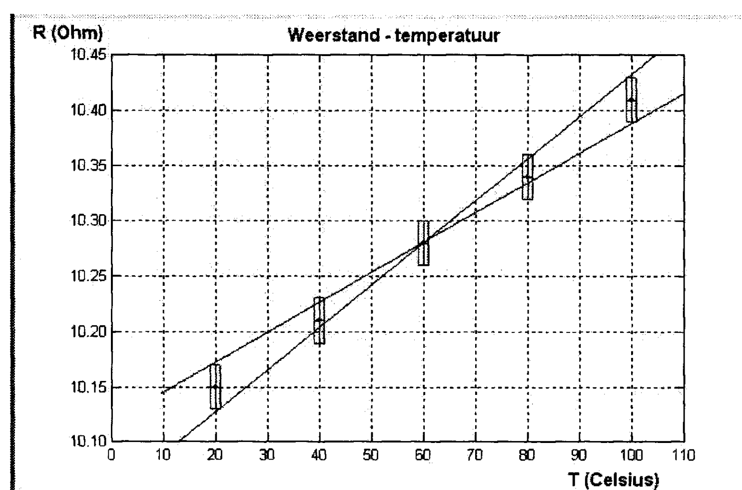
- Je trekt twee meetwaarden van elkaar af en introduceert daarmee een extra onnauwkeurigheid.
- Je lineariseert door de logaritme te nemen en je zou dus met gewichten voor de meetpunten moeten werken.
- De k waarnaar je op zoek bent, zit ook stiekem in de constante. Daardoor is het moeilijk om de juiste onnauwkeurigheid in k vast te stellen.
- De Guggenheim methode dwingt je om het tijdsinterval Δt toch behoorlijk groot te kiezen en daardoor "verlies" je flink wat meetpunten.

Het lineariseren van nog complexere relaties wordt afgeraden. De oorspronkelijke meetdata moeten dan zo omgewerkt worden dat ze niet meer goed herkenbaar zijn in de uiteindelijke plot. Ook is het gebruik van gewichten vaak ondoenlijk.
In dit soort gevallen is toepassen van de directe kleinste kwadratenfit een veel betere oplossing. Daarbij hoeft er niet gelineariseerd te worden: de meetwaarden worden direct geplot en gebruikt voor de beste fit. De directe methode kan ook bij eenvoudige relaties toegepast worden en is een goed alternatief voor het proces lineariseren + gewichten toekennen + lineaire kleinste kwadratenfit.

6.5.8 Maximale/minimale helling methode

Als de kleinste kwadraten methode niet zinvol gebruikt kan worden om de helling en de asafsnede van een lijn plus de onnauwkeurigheid daarin te bepalen, kan soms de maximale/ minimale helling methode ingezet worden. Dit doet zich bijvoorbeeld voor als ijkfouten een belangrijke rol spelen. We plotten de meetpunten met foutengebiedjes; omdat ijkfouten de overhand hebben, gaat het om de mogelijke fout.
Bij de maximale/minimale helling methode trekken we 'handmatig' twee lijnen door alle foutengebiedjes: eentje met minimale helling en eentje met maximale helling. Als helling voor de best passende rechte lijn nemen we het gemiddelde van beide waarden. Als mogelijke fout in de helling geven we het verschil tussen beiden gedeeld door twee.
Hetzelfde doen we voor de beste waarde van de as-afsnede.

Helling. De weerstand van een metaaldraad is gemeten bij verschillende temperaturen. We verwachten een lineair oplopend verband. De meetpunten zijn geplot met bijbehorend foutengebiedje. De mogelijke fout in de R-waarden wordt overheerst door ijkfouten.

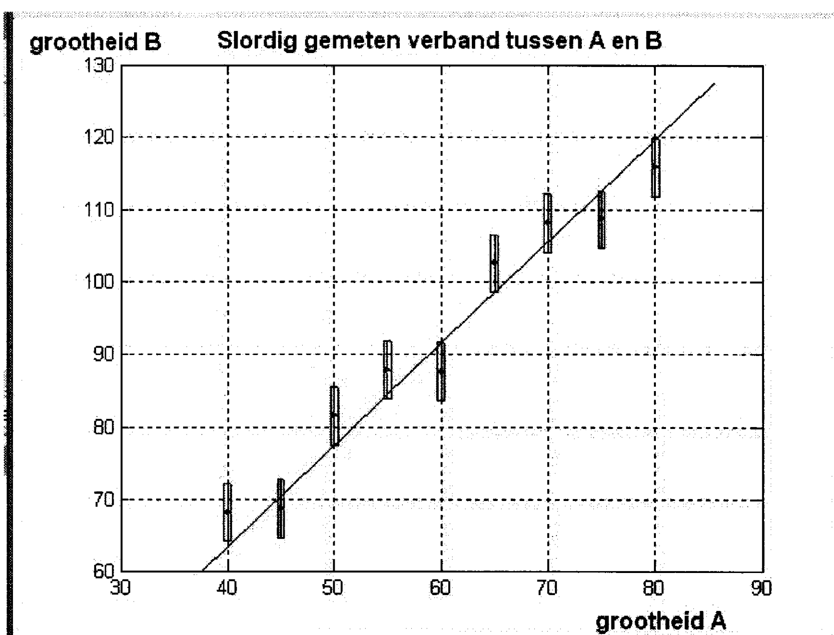


Allereerst constateren we dat het theoretisch verwachte lineaire verband tussen R en T door onze metingen bevestigd wordt.

In de grafiek hebben we twee lijnen getrokken: eentje met minimale helling die nog door alle meetpunten gaat en eentje met maximale helling. De bijbehorende waarden zijn 0,0027 en 0,0038 Ω/°C. De as-afsnede is in dit geval niet van belang.
Als beste helling vinden we dus: 0,00325 ± 0,00055 Ω/°C. Afgerond 3,3 ± 0,6 mΩ/°C.
Ter vergelijking hebben we ook een kleinste kwadraten berekening op de meetpunten losgelaten. Resultaat: helling = 0,00325 ± 0,00005 Ω/°C. De waarde voor de beste helling is dus hetzelfde, maar de fout erin is een factor tien kleiner.
In dit geval is het resultaat van de kleinste kwadraten methode niet zinvol omdat er sprake is van een behoorlijk grote onnauwkeurigheid in de R-waarden op grond van ijkfouten.

Het gebruik van de maximale/minimale helling dient goed overwogen te gebeuren. Onoordeelkundig gebruik kan leiden tot volkomen foute conclusies. In onderstaand voorbeeld wordt de maximale/minimale helling methode onterecht gebruikt.

Foutief gebruik max/min helling. Een enigszins slordige waarnemer doet een serie metingen om het veronderstelde lineaire verband tussen de grootheden A en B te onderzoeken.
Hij plot zijn resultaten met foutengebiedjes, de fouten zijn hoofdzakelijk random van aard.



Het is mogelijk om een rechte lijn door de meetpunten te trekken, onze waarnemer constateert dan ook dat het lineaire verband tussen A en B bevestigd wordt.
Toepassen van de minimale/maximale helling methode levert als resultaat dat er maar één lijn getrokken kan worden, met andere woorden de helling is nauwkeurig bepaald, waarde 1,4097. De as-afsnede wordt bepaald op 7,0019.
Toepassen van de kleinste kwadraten methode geeft heel andere resultaten:
helling = 1,2657 ± 0.090802 en de as-afsnede = 16,1933 ± 5.5728.
Het zal duidelijk zijn dat in dit geval de maximale/minimale helling methode onzinnige informatie geeft.

De maximale/minimale helling methode levert niet het $\sqrt{n}$ voordeel van statistische methodes. De onnauwkeurigheid in de helling en in de as-afsnede wordt bepaald door de foutengebiedjes van de individuele meetpunten en wordt niet kleiner als er binnen het meetgebied meer meetpunten liggen.

6.6 Directe kleinste kwadratenfit (algemeen)

In de vorige paragraaf is besproken hoe je de geldigheid van een bepaald theoretisch verband tussen twee grootheden kunt onderzoeken. Centraal stond de linearisering: de meetwaarden

moesten zo omgewerkt worden dat ze op een rechte lijn kwamen te liggen. In deze paragraaf laten we zien dat het ook anders kan, veel rechtstreekser, met de directe kleinste kwadratenfit.

6.6.1 Meetwaarden, model, parameter(s)

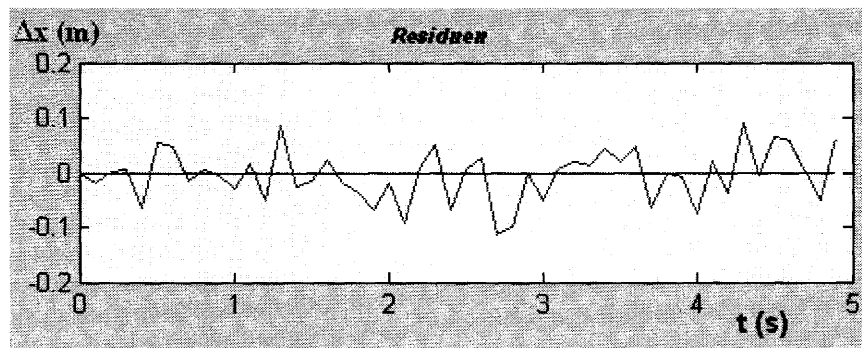
We hebben een serie meetwaarden $\{xm_i, ym_i\}$ waarbij de onnauwkeurigheid toevallig van aard is en vooral in de *ym*-waarden zit. En we hebben een theoretisch model waarmee we bij elke *x*-waarde een *yc*-waarde kunnen berekenen $\{xm_i, yc_i\}$. In het model gebruiken we dus de *x*-waarden van de meting. Het model heeft één of meer parameters die we nodig hebben om de berekening van de *yc*-waarden te kunnen uitvoeren.
Als we het model gaan toetsen aan de meetwaarden gaat het om twee dingen.
Allereerst de vraag of het model in overeenstemming is met de meetwaarden. En zo ja wat dan de beste waarde van de parameters is.
In het geval van een lineair verband beantwoordden we de eerste vraag door te kijken of er een rechte lijn door de meetpunten met hun foutengebiedjes getrokken kon worden. In de directe methode kijken we naar de residuen: de verschillen tussen de gemeten en berekende *y*-waarden. Als de residuen "netjes" rond de nul zitten, mogen we stellen dat het model in overeenstemming is met de meetwaarden. Met netjes bedoelen we dat de residuen *random* rond nul gespreid zijn en dat er geen systematische trend in aanwezig is.
Als we vastgesteld hebben dat het model in overeenstemming is met de meetwaarden, volgt de beste waarde van de parameter(s) uit het kleinste kwadraten criterium:

$$\Sigma\,(ym_i - yc_i)^2 \text{ is minimaal.}$$

Dit criterium kan gewoon toegepast worden, ook als er een niet-lineair verband is.
De meetwaarden hoeven dus niet omgerekend te worden. En ze hebben meestal een ongeveer gelijke onnauwkeurigheid, waardoor het ook niet nodig is om gewichten te gebruiken.

6.6.2 Residuen

Het grote voordeel van de directe methode is dat je ziet hoe goed de fit is. De residuen zijn het verschil tussen de gemeten waarde en de berekende waarde zonder verdere bewerkingen.



Bovenstaande residuen-plot is afkomstig van een directe kleinste kwadraten fit van een valbeweging met wrijving. Het gebruikte model ging uit van een zwaartekracht en een luchtwrijving die evenredig was met het kwadraat van de valsnelheid. Om de kwaliteit van de fit te beoordelen moeten we kijken of de residuen "netjes" rond de nul zitten. In deze plot ziet dat er goed uit. Conclusie: het model is in overeenstemming met de meetwaarden. We kunnen zelfs iets zeggen over de meetonnauwkeurigheid. Uit de plot leiden we verder af dat de meetonnauwkeurigheid in de individuele metingen ongeveer 0,10 m bedraagt.

6.6.3 Er bestaat een formule-relatie

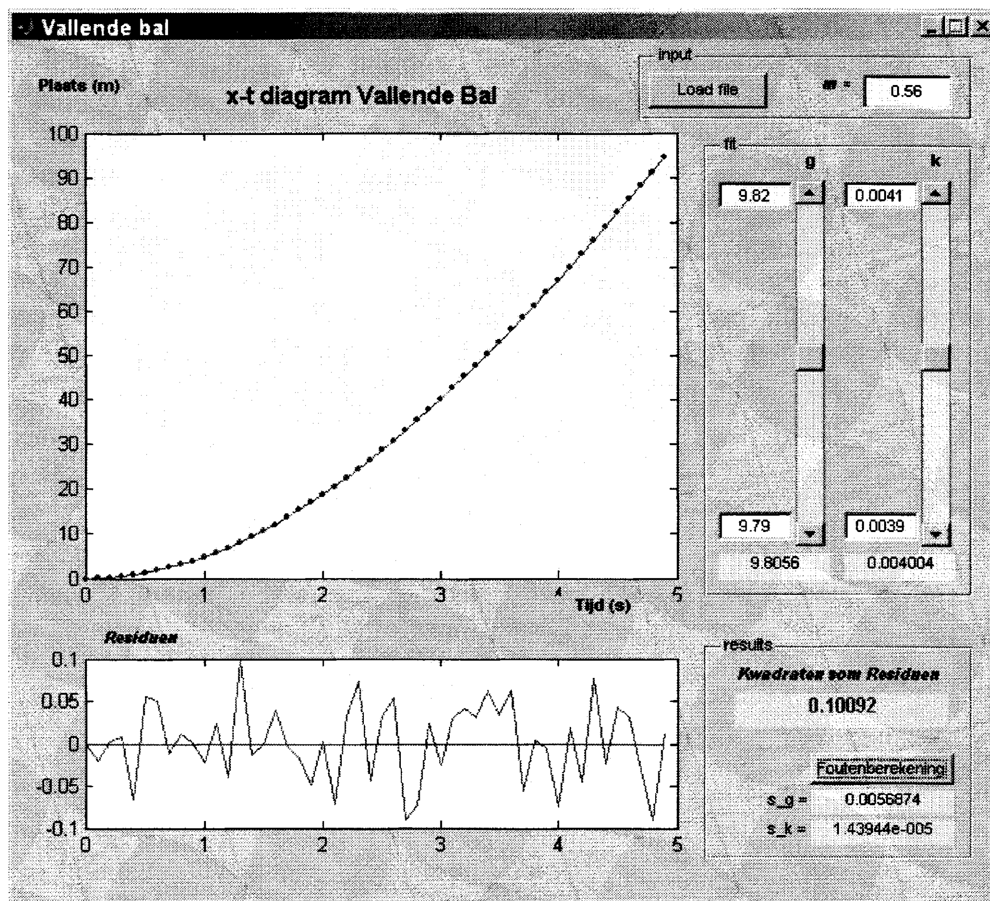
In veel gevallen bestaat het theoretisch verband tussen de gemeten grootheden uit een formule-relatie: de y-waarden kunnen rechtstreeks uit de x-waarden worden berekend. De formule kan eenvoudig zijn maar ook ingewikkeld. Van belang is hoe de parameter(s) in de formule voorkomen. Als deze als coëfficiënt voor een functie staan, is de kleinste kwadratenfit gemakkelijk uit te voeren. We maken dan gebruik van de inversie-berekening, zie bijlage 6C. Het gaat dus om een formule-relatie die te schrijven is als:

$$y = a + b \cdot f(x) + c \cdot g(x) + d \cdot h(x)$$

waarbij a, b, c en d de parameters van het model zijn en de functies $f(x)$, $g(x)$ en $h(x)$ geen parameter bevatten. Er mogen ook meer of minder dan vier termen aanwezig zijn.
De inversie-berekening levert, net als bij een lineaire kleinste kwadraten fit, de beste waarde voor de parameter(s) plus de statische onnauwkeurigheid daarin. Het moge duidelijk zijn dat een lineaire relatie, als eenvoudige polynoom, toegelaten is. Met andere woorden: de inversie-berekening sluit de lineaire kleinste kwadratenfit in.
Of beter gezegd: de lineaire kleinste kwadratenfit is een eenvoudige toepassing van de inversie-berekening die een eigen leven is gaan leiden omdat hij nog met de hand uit te werken is. In de inversie-berekening worden allerlei matrix-operaties gedaan die in het geval van een lineaire relatie herleid kunnen worden tot een stel vergelijkingen dat opgelost kan worden. Dit verklaart de sterke obsessie om alle mogelijke relaties te willen lineariseren. Tegenwoordig laat men de computer het werk doen en vormen matrix-operaties geen enkel probleem. En ligt het gebruik van een directe kleinste kwadratenfit veel meer voor de hand.

6.6.4 Er bestaat geen formule-relatie

Soms bestaat er geen formule-relatie tussen de y-waarden en de x-waarden. Of de relatie is zo gecompliceerd dat niet aan de voorwaarde voor de inversie-berekening is voldaan.



Als voorbeeld nemen we de vallende bal die luchtwrijving ondervindt. De plaats van de bal is gemeten als functie van de tijd. In de bovenstaande grafiek zijn de meetpunten weergegeven. Het theoretische model luidt: $F_{netto} = m \cdot g - k \cdot v^2$ waarin de gravitatieversnelling g en de en de evenredigheids constante k de parameters zijn. Het zou heel veel moeite kosten om dit om te werken naar een expliciete *x(t)* relatie. Waarbij het dan nog maar vraag is of de parameters g en k inderdaad als coëfficiënt tevoorschijn komen. Met andere woorden, de inversie-methode lijkt hier niet te kunnen worden toegepast.
Voor de hand ligt een numerieke oplossing van de beweging. Dit is elementaire mechanica. De parameters worden achter een schuifje geplaatst en de kleinste kwadraten fit kan handmatig gezocht worden. Op het voordeel dat de residuen zichtbaar en direct te interpreteren zijn, is al eerder gewezen.
In de bijlage 6C is beschreven hoe de onnauwkeurigheid in de parameters bepaald kan worden via de afhankelijkheid van de residuele kwadratensom van elk der parameters.

6.6.5 Het corrigeren van de systematische fout

Als meetwaarden alleen een toevallige fout hebben, heeft het zin om veel metingen te doen. De metingen hebben een random spreiding die statistisch uitmiddelt, zo is de gedachte. De onnauwkeurigheid in het gemiddelde neemt af met een factor $\sqrt{n}$, waarbij n het aantal waarnemingen is. Hetzelfde geldt voor de onnauwkeurigheid in een model-parameter die via een kleinste kwadratenfit uit de meetwaarden is afgeleid.
Het verhaal wordt heel anders als de meetwaarden ook een systematische fout hebben die niet verwaarloosbaar is ten opzichte van de toevallige fout. Systematische fouten laten zich niet uitmiddelen en het doen van veel metingen zou om die reden zijn zin verliezen. De oorzaak van een systematische fout moet gezocht worden in een meetapparaat met een (mogelijke) ijkfout. Een voltmeter kan, binnen zekere grenzen, systematisch iets te veel of te weinig aangeven. En dat kan per meetbereik ook nog verschillen. De onnauwkeurigheid in de ijking wordt door de fabrikant vermeld en is voor de waarnemer een feit waarmee hij zijn metingen moet beoordelen. Als een fabrikant tienduizend voltmeters van een bepaald type aflevert, zullen er ongetwijfeld enkele tussen zitten die niet of nauwelijks een afwijking hebben. Maar de gebruiker weet niet welke dat zijn en moet uitgaan van de opgegeven grenzen.
Er is een uitweg om het probleem van de (mogelijke) ijkfout te omzeilen. Namelijk door zelf het te gebruiken meetapparaat opnieuw te ijken. In het geval van een voltmeter kan de waarnemer een aantal nauwkeurig bekende spanningen met zijn voltmeter nameten en van de afwijking een correctiecurve maken. Met behulp van die curve kan hij latere meetwaarden zuiveren van een systematische afwijking. Het resultaat is een serie gecorrigeerde meetwaarden met alleen een toevallige fout; het toepassen van statistische technieken heeft dan weer zin.

7 Elektrische componenten, schakelingen en meet-apparatuur

7.1 Inleiding

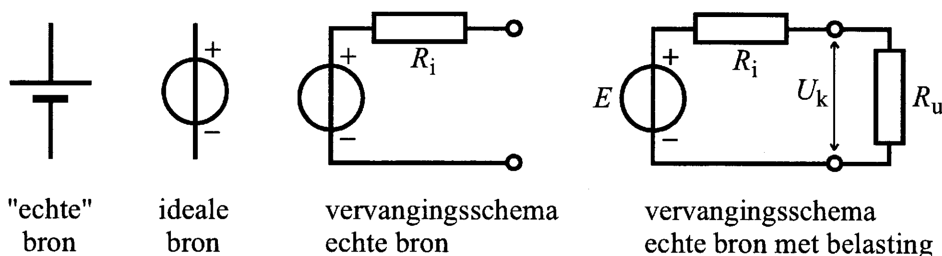
Voor het meten van fysische verschijnselen wordt vaak gebruik gemaakt van elektrische schakelingen en meetapparatuur. De meeste gegevens over elektrische componenten en apparatuur zijn direct te vinden in de Componenten- en Apparatuurdocumentatie. In dit hoofdstuk worden een aantal praktische zaken waar je tijdens het meten tegen aan kan lopen behandeld.

7.2 Elektrische stromen en spanningen

7.2.1 Bronspanning, klemspanning, inwendige weerstand

De *bronspanning E* is de elektrische spanning tussen de polen van een bron als door de bron geen elektrische stroom loopt.
De bronspanning kan een functie van de tijd zijn; b.v. in een wisselspanningsbron.
De *klemspanning U of* U_k is de elektrische spanning tussen de polen van de bron als door de bron een elektrische stroom loopt. Bij levering van of het ontvangen van elektrische energie door de bron is de klemspanning respectievelijk kleiner of groter dan zijn bronspanning (het ontladen van een accu).
Voor een spanningsbron is een *vervangingsschema* op te stellen.

Als het vervangingsschema voor een gelijkspanningsbron met een in serie geschakelde weerstand R_i genomen worden (zie fig. 7.1). De spanning tussen de polen van de denkbeeldige spanningsbron (R=0) wordt onafhankelijk van de stroomsterkte door de bron verondersteld. De weerstand R_i waarvan we aannemen dat daarop de wet van Ohm van toepassing is, noemt men de *inwendige weerstand.*



Figuur 7.1 - Schematekens voor een gelijkspanningsbron en Uitwendige belasting van een gelijkspanningsbron

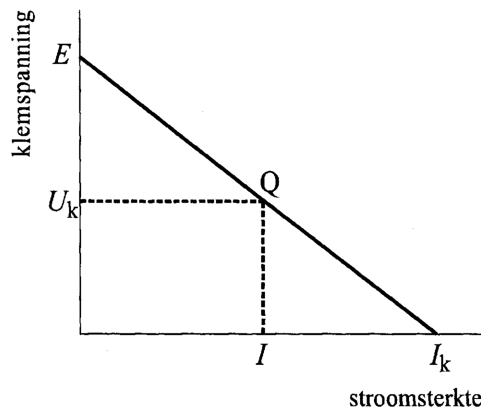
Verbinden we de polen van een gelijkspanningsbron door een weerstand R_u zodat er een stroomsterkte I gaat lopen, dan geldt volgens de wet van Ohm:

$$I = \frac{E}{R_i + R_u}$$
$$U_k = IR_u = E\frac{R_u}{R_i + R_u} \qquad (7.1)$$
$$U_k = E - IR_i$$

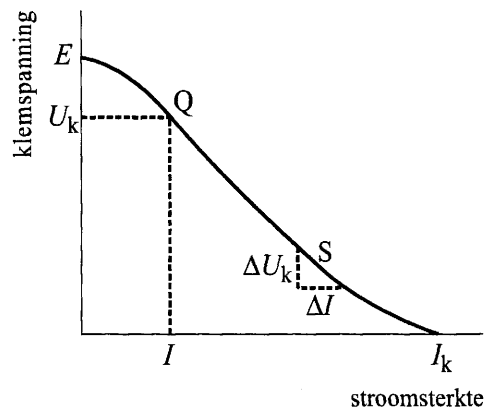
R_u wordt, ook als deze polen van een werkelijke spanningsbron verbindt, de *uitwendige weerstand* of *belastingsweerstand* genoemd.

7.2.2 U-I karakteristiek van een bron

Onder de U-I karakteristiek van een bron verstaat men de grafische voorstelling van het verband tussen de klemspanning en de stroomsterkte in de bron.



Figuur 7.2 – Ohmse karakteristiek van een gelijkspanningsbron



Figuur 7.3 – Niet-ohmse karakteristiek van een gelijkspanningsbron

In de figuren 7.2 en 7.3. zijn U-I karakteristieken weergegeven. Als de belasting groter wordt (R_u kleiner en I groter) zal de klemspanning U_k dalen (door de spanningsval $I{\cdot}R_i$). Hierbij moet E constant blijven of worden gehouden.

De belastingsweerstand bij een punt Q in de grafiek volgt uit

$$R_u = \frac{U_k}{I_Q} \qquad (7.2)$$

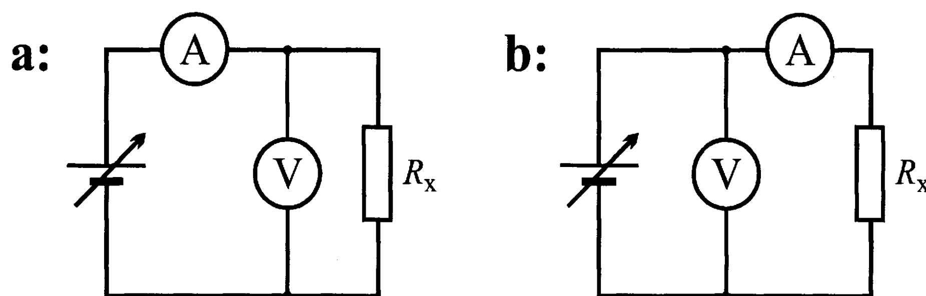
De stroomsterkte I_k (zie figuur 7.2 en 7.3) noemt men de *kortsluitstroom*, De *differentiële weerstand* R_d is voor een bron, waarvan de U-I karakteristiek geen lineair verloop vertoont, een belangrijk gegeven. De differentiële weerstand is gelijk aan de absolute waarde van het differentiaalquotiënt dU_k/dI. Voor het punt S van figuur 7.3 geldt

$$R_{d_s} = \left|\lim_{\Delta I \to 0} \frac{(\Delta U_k)_s}{\Delta I}\right| = \left|\left(\frac{dU_k}{dI}\right)_s\right| \qquad (7.3)$$

Het in figuur 7.1 gegeven vervangingsschema heeft een veel wijdere strekking dan alleen het representeren van spanningsbronnen. Elke spanning die aan de uitgang van een (lineair) systeem verschijnt heeft de eigenschap 'in elkaar te zakken' wanneer de klemmen worden belast. Dat kan bijvoorbeeld ook op de uitgang van een versterker slaan, waarbij de uitgangsspanning een functie van de ingangsspanning is. In het algemeen geeft men dat weer door een 'open spanning' te definiëren alsmede een denkbeeldige weerstand in serie met de ene klem. Die weerstand noemen wij hier '*inwendige weerstand*', maar in de toekomst wordt deze ook wel '*uitgangsweerstand*' of *uitgangsimpedantie* genoemd. Als symbool wordt R_i, maar ook wel R_u of Z_{uit} gebruikt, zodat makkelijk verwarring kan ontstaan met de belastingsweerstand.

7.2.3 Weerstandsbepaling door stroom- en spanningsmeting

De meest voor-de-hand-liggende methode bij weerstandsbepaling is het meten van zowel de stroom door als de spanning over een component. Deze methode heeft als voordeel dat ook de geldigheid van de wet van Ohm wordt nagegaan. Er zijn in principe twee schakelingen denkbaar, die in figuur 7.4 zijn weergegeven.



Figuur 7.4 - Twee mogelijke schakelingen voor weerstandsbepaling door stroom- en spanningsmeting

Men kan nagaan dat in schakeling a de stroom door de spanningsmeter een systematische fout oplevert, en in schakeling b de spanningsval over de stroommeter. In beide gevallen kan voor die fout worden gecorrigeerd wanneer men de inwendige weerstand (die de fout veroorzaakt) kent. In de documentatie van de meetapparatuur is deze gegeven of wordt er een waarde gegeven over de spanningsval over of de stroom die door het apparaat staat resp. loopt. Deze waarden kunnen eventueel afhangen van het bereik waarin de meter gebruikt wordt.

7.2.4 Vermogen bij gelijkstroom

Volgens de wet van Joule geldt voor de per tijdseenheid ontwikkelde warmte in een geleider, het vermogen P:

$$P = I^2 \cdot R \tag{7.4}$$

Voor een geleider die aan de wet van Ohm voldoet is dit vermogen juist gelijk aan de per tijdseenheid toegevoerde elektrische energie, dat wil zeggen het aan de geleider toegevoerde elektrische vermogen:

$$P = UI (= \frac{U^2}{R}) \tag{7.5}$$

Strikt genomen geldt de uitdrukking P slechts voor gelijkstromen (DC afgeleid van Direct Current). Bedenk nl. dat bij wisselstromen een deel van de toegevoerde elektrische energie in energie van elektromagnetische straling wordt omgezet (vergelijk met een zendantenne voor radiogolven). In vele gevallen is de fractie van de elektrische energie die in de energie van elektromagnetische straling wordt omgezet verwaarloosbaar klein.

7.2.5 Wisselstromen en –spanningen

Onder *wisselspanning* verstaat men een elektrisch verschijnsel waarbij de polariteit periodiek in de tijd verandert. Bij een *wisselstroom* (AC afgeleid van Alternating Current) verandert de richting waarin de lading stroomt periodiek.
Stroomsterkte en spanning zijn functies van de tijd; de waarde van een grootheid op een bepaald *tijdstip* noemt men de *momentele* waarde van die grootheid:

- momentele waarde van de stroomsterkte: $i(t)$
- momentele waarde van spanning: $u(t)$ (7.6)
- momentele waarde van de bronspanning: $e(t)$

Voor sinusvormige wisselstroomgrootheden wordt de *amplitude of topwaarde* voor de stroom, spanning en bronspanning respectievelijk genoteerd als $\hat{\imath}$, $\hat{u}$, en $\hat{e}$. De *frequentie,* het aantal perioden per tijdseenheid is de herz (Hz).
Verder voert men in de *cirkelfrequentie* $\omega = 2\pi\nu$ met de eenheid s^{-1} en de *fasehoek* θ of ϕ uitgedrukt in radialen. Met een harmonische tijdfunctie wordt de notatie voor:

- wisselstroom: $i(t) = \hat{\imath}\cos(\omega t + \theta)$
- wisselspanning: $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \theta)$ (7.7)
- bronspanning: $e(t) = \hat{e}\cos(\omega t + \theta)$

7.2.6 Effectieve waarde van wisselstroomgrootheden

Bij metingen en berekeningen werkt men meestal met de effectieve waarde. Voor de effectieve waarde van wisselstroomgrootheden zijn voor stroom en spanning respectievelijk de *symbolen I en U* gereserveerd. De *effectieve waarde* van een wisselstroom is die waarde van een constante gelijkstroom die in een ohmse weerstand in hetzelfde tijdsinterval dezelfde hoeveelheid warmte zou ontwikkelen. (Onder een ohmse weerstand verstaat men een weerstand waarvan de grootte van die weerstand onafhankelijk is van de grootte en frequentie van de stroom). De aan de ohmse weerstand toegevoerde elektrische energie wordt totaal in warmte omgezet. Daar het verloop van de stroom zich na één periode weer herhaalt, bekijken we één periode; mathematisch betekent bovenstaande definitie dan (denk aan de betekenis van *i* en *I*):

$$\int_0^T i^2.R.dt = I^2 R.T, \text{ zodat } I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2.dt \qquad (7.8)$$

Berekenen we dit voor een *harmonische tijdfunctie* dan krijgen we:

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{\imath}^2.\cos^2(\omega t + \phi).dt = \frac{1}{2}\hat{\imath}^2 \qquad (7.9)$$

(want het tijdsgemiddelde van $\sin^2$ en $\cos^2$ is gelijk aan $\frac{1}{2}$), zodat $I = \frac{1}{2} i\sqrt{2}$ en evenzo $U = \frac{1}{2} u\sqrt{2}$ voor *(co)sinusvormige* wisselstromen!

Voorbeeld:
De amplitude (topwaarde) van een wisselspanning van 220 V effectief, is 311 V. De warmteontwikkeling van die wisselspanning is dus gelijk aan de warmteontwikkeling door 220 V - gelijk- spanning.

7.2.7 Vermogen bij wisselstroom

Het (gemiddelde) vermogen dat aan een netwerkelement wordt toegevoerd bij wisselstroom wordt gegeven door

$$W(t) = UI.t.\cos\theta \qquad (7.10)$$

Voor een ohmse weerstand geldt: θ=0 (stroom en spanning zijn in fase). *U* en *I* zijn hier de effectieve waarden van wisselspanning en -stroom.

7.3 Eigenschappen van lineaire componenten

Lineaire componenten zijn weerstanden, spoelen (inducties) en condensatoren (capaciteiten). Ze worden tot de lineaire componenten gerekend, omdat de spanning over de component evenredig is met de stroom door de component.

7.3.1 De spanning-stroom (U-I) relatie

De relatie tussen de spanning (*U*) over en de stroom (*I*) door een weerstand, spoel of condensator wordt gegeven in tabel 7.1.

	$U = f(I)$	$I = g(U)$	
Weerstand (*R* in ohm)	$U = IR$	$I = \frac{U}{R}$	(7.11)
Spoel (*L* in henry)	$U = L\frac{dI}{dt}$	$I = \frac{1}{L}\int U dt$	(7.12)
Condensator (C in farad)	$U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I dt$	$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}$	(7.13)

Tabel 7.1 Spanning -stroomrelaties voor weerstand, spoel en condensator

7.3.2 Sinusoïdale analyse

Voor een sinusvormige stroom $I=I_0\sin(\omega t)$ door een component (of een sinusoïdale spanning $U=U_0\sin(\omega t)$ over een component) volgt uit tabel 3.1 direct de tijdsafhankelijkheid van de spanning (stroom).

	$I = I_0 \sin(\omega t)$	$U = U_0 \sin(\omega t)$	
R (Ω)	$U = I_0 R \sin(\omega t)$	$I = \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$	(7.14)
L (H)	$U = I_0 \omega L \cos(\omega t) = I_0 \omega L \sin(\omega t + \pi/2)$	$I = -\frac{U_0}{\omega L}\cos(\omega t) = \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t - \pi/2)$	(7.15)
C (F)	$U = -\frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t) = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t - \pi/2)$	$I = U_0 \omega C \cos \omega t = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$	(7.16)

Tabel 7.2 - Spanning-stroom relaties voor weerstand, spoel en condensator in het geval van sinusoïdale stroom of spanning

Voor de spoel en de condensator blijkt er een faseverschil te bestaan tussen de spanning en de stroom. De relatie $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ laat zien dat voor een spoel het faseverschil tussen spanning en stroom $+\pi/2$ is (d.w.z. dat de spanning een kwart periode *voorloopt* op de stroom). Voor een condensator geldt de relatie $-\cos(\omega t) = \sin(\omega t - \pi/2)$. Hieruit volgt dat het faseverschil $-\pi/2$ is (d.w.z. dat de spanning een kwart periode *achterloopt* op de stroom). Bij de weerstand is de spanning in fase met de stroom. Dit maakt de weerstand bij uitstek geschikt om een stroomsignaal om te zetten in een (*gelijkvormig*) spanningssignaal.
Zoals blijkt uit tabel 7.2 is de amplitude van de spanning over een weerstand, spoel of condensator evenredig met de amplitude van de stroom. Daarom worden ze *lineaire componenten* genoemd. Dit in tegenstelling tot *niet*-lineaire componenten, zoals bijvoorbeeld een diode, waarvoor de spanning niet evenredig met de stroom is.

7.3.3 Effectieve weerstand en de impedantie *Z*

Uit tabel 7.2 volgt dat, net als in het geval van de weerstand, een stroom door een spoel of condensator een spanning tot gevolg heeft. Deze componenten hebben dus een *effectieve weerstand.* Omdat de effectieve weerstand voor een wisselstroom wordt gedefinieerd (gelijkstroom is hier een bijzonder geval van) komt men soms ook wel de term *wisselstroomweerstand* tegen.
De *impedantie*, aangegeven met de letter Z, wordt gekarakteriseerd door twee grootheden: de effectieve weerstand en het faseverschil tussen spanning en stroom, aangegeven met de letter φ. De effectieve weerstand is de absolute waarde van de impedantie gedefinieerd door het quotiënt van de spanningsamplitude en de stroomamplitude: $|Z| = U_0/I_0$. Uit de definitie volgt direct dat de impedantie dezelfde eenheid heeft als de weerstand.
De bovenstaande definitie geldt alleen voor sinusoïdale spanning en stroom. Het geldt dus niet voor een willekeurige tijdsafhankelijkheid!
De effectieve weerstand is direct te bepalen uit tabel 7.2. Voor de weerstand is

$$|Z| = R \qquad (7.17a)$$

voor de spoel

$$|Z| = \omega L = 2\pi f L \qquad (7.17b)$$

en voor de condensator

$$|Z| = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}. \qquad (7.17c)$$

Hierbij is f de frequentie van de wisselstroom(-spanning). Zoals uit vgl.(7.17) blijkt is de effectieve weerstand van de spoel en de condensator afhankelijk van de frequentie. Voor $f \to 0$). (d.w.z. gelijkspanning) gaat voor de spoel $|Z| \to 0$ (kortsluiting) en voor de condensator $|Z| \to \infty$ (open). Voor $f \to \infty$ gaat voor de spoel $|Z| \to \infty$ (open) en voor de condensator $|Z| \to 0$ (kortsluiting)

7.3.4 Bepaling van de effectieve weerstand uit de spanning-stroom relatie

In de literatuur wordt de term impedantie vaak losjes gebruikt en bedoeld men eigenlijk alleen de effectieve weerstand. Uit de context moet dan duidelijk worden in welke betekenis de term impedantie wordt gebruikt. Om erachter te komen in welke betekenis de term impedantie gebruikt wordt is het nodig te achterhalen of de fase relevant is. Als de fase in de analyse niet van belang is wordt de effectieve weerstand bedoeld. In deze handleiding wordt geprobeerd om verwarring te voorkomen. Als de fase niet van belang is in de analyse wordt de term *effectieve weerstand* gebruikt. Als de fase wel van belang is wordt de term *impedantie* gebruikt.
Voor de weerstand zijn de spanning en stroom in fase: het faseverschil is altijd nul! De impedantie is dan op ieder tijdstip gelijk aan het quotiënt van de spannings- en de stroomamplitude.
Voor de spoel ligt het iets lastiger. Uit tabel 7.2 volgt dat de spanning over de spoel gelijk is aan de amplitude op het moment dat de stroom door de spoel nul is. Door de spanning bij de nuldoorgang van de stroom te meten en de amplitude van de stroom te meten kan de effectieve weerstand van de spoel bepaald worden.
Voor de condensator geldt een analoge redenering als voor de spoel. Ook hier is de amplitude gelijk aan de spanning over de condensator op het moment dat de stroom door de condensator nul is. Op dezelfde manier als voor de spoel kan dan de effectieve weerstand van de condensator bepaald worden.

Oefening
Teken m.b.v. tabel 7.2 de U-I karakteristiek van een weerstand, een spoel en een condensator. Neem bijvoorbeeld $R = 100\ \Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1\ \mu$F en $f = 1000$ Hz. Zet de stroom op de x-as en de spanning op de y-as uit. Geef aan hoe je uit de U-I curve de effectieve weerstand van de componenten bepaalt.

7.3.5 Impedanties van serie- en parallelschakelingen

Losse componenten komen eigenlijk nooit voor. De eenvoudigste uitbreiding is een combinatie van twee componenten. Dit kan in de vorm van een serieschakeling of een parallelschakeling. De effectieve weerstand is, net als voor de losse componenten, gedefinieerd als het quotiënt van de spannings- en stroomamplitude voor de gehele schakeling. De effectieve weerstand van de afzonderlijke componenten in de schakeling is, net als voorheen, gedefinieerd als het quotiënt van spannings- en stroomamplitude voor de betreffende componenten.

Serieschakeling van weerstand en condensator
In het geval van een serieschakeling is de stroom door de componenten hetzelfde. De spanning over de afzonderlijke componenten voor een gegeven stroom wordt gegeven in tabel 7.2.

Door de spanning van de twee componenten op te tellen wordt de totale spanning over de serieschakeling verkregen. Als de amplitude van de totale spanning en de amplitude van de stroom bekend is kan de effectieve weerstand van de serieschakeling berekend worden. Voor de stroom wordt $I = I_0\sin(\omega t)$ genomen. Uit tabel 7.2 volgt dan voor de weerstand $U_R = U_{0R}\sin(\omega t)$, met $U_{0R}= I_0R$. Voor de condensator volgt $U_C = -U_{0C}\cos(\omega t)$, met $U_{0C} = I_0/\omega C$. De totale spanning wordt dan $U = U_R+U_C = U_{0R}\sin(\omega t) - U_{0C}\cos(\omega t)$. De spanning over deze serieschakeling bevat een component die in fase is met de stroom en een component die een kwart periode voorloopt.
Uitwerking. Uit de U-I karakteristiek kan zowel de totale effectieve weerstand als de effectieve weerstanden van de weerstand en de condensator bepaald worden. Voor de effectieve weerstand van de serieschakeling wordt de amplitude van de totale spanning bepaald en door de amplitude van de stroom gedeeld.
De effectieve weerstand van het weerstandsdeel volgt uit de spanningsamplitude over de weerstand. Deze kan gemeten worden op het moment dat de stroom maximaal is (dan is de spanning over de condensator nul!). Het quotiënt van de gemeten spanningsamplitude en de stroomamplitude geeft de gezochte effectieve weerstand.
Voor de effectieve weerstand van de condensator wordt de spanning gemeten op het moment dat de stroom nul is. De spanning over de weerstand is dan ook nul en de gemeten spanning is meteen de amplitude van de spanning over de condensator. Het quotiënt van de gemeten spanningsamplitude en de stroomamplitude geeft de effectieve weerstand van de condensator.

Oefening

- Teken m.b.v. de beschreven relatie de U-I karakteristiek van de serieschakeling van een weerstand en een condensator. Neem R = 100 Ω, C = 1 μF en f = 1000 Hz. Geef aan hoe je uit de U-I karakteristiek de effectieve weerstand van de componenten en de effectieve weerstand van de serieschakeling bepaalt.

Parallelschakeling van spoel en weerstand

In het geval van een parallelschakeling is de spanning over de componenten hetzelfde. De stroom door de componenten voor een gegeven spanning wordt gegeven door tabel 7.2. Door de stroom door de twee componenten op te tellen wordt de totale stroom door de parallelschakeling verkregen. De effectieve weerstand van de parallelschakeling wordt gegeven door het quotiënt van de amplitude van de spanning en de amplitude van de totale stroom.
Uitwerking. De spanning is $U = U_0\sin(\omega t)$. Uit tabel 7.2 volgt dan voor de weerstand $I_R = I_{0R}\sin(\omega t)$, met $I_{0R} = U_0/R$. Voor de spoel volgt $I_L = -I_{0L}\cos(\omega t)$, met $I_{0L} = U_0/\omega L$. De totale stroom wordt dan gegeven door $I = I_R + I_L = I_{0R}\sin(\omega t) - I_{0L}\cos(\omega t)$.
Analoog aan het geval van de serieschakeling wordt de totale effectieve weerstand gegeven door het quotiënt van de spanningsamplitude en de totale stroomamplitude. De effectieve weerstand van de weerstand in de schakeling wordt bepaald m.b.v. de stroom bij maximale spanning (dan is de stroom door de spoel nul). De impedantie van de spoel wordt bepaald m.b.v. de stroom bij spanning nul (dan is de stroom door de weerstand nul). De benodigde spanningsamplitude kan direct bepaald worden en is gelijk voor beide componenten. De gebruikelijke quotiënten geven ons weer de effectieve weerstanden.

Oefeningen

- In de praktijk is de serieschakeling van een weerstand en een spoel een vaker voorkomende situatie. Een echte spoel is namelijk gewikkeld van koperdraad met een ohmse weerstand. Deze weerstand wordt in het elektrische schema opgenomen als een weerstand in se-

rie met een (ideale) spoel. *Doe de bovenstaande analyse voor de serieschakeling van een weerstand en een spoel.*

- In de praktijk is de parallelschakeling van een weerstand met een condensator ook een vaker voorkomende situatie. Een echte condensator heeft vaak een diëlectricum tussen de condensatorplaten om de capaciteit te vergroten. Dit diëlectricum heeft een (meestal grote) lekweerstand met ohmse karakteristieken. Deze lekweerstand wordt in het elektrische schema opgenomen als een weerstand parallel aan de (ideale) condensator. *Doe de bovenstaande analyse voor de parallelschakeling van een weerstand en een condensator*

7.3.6 Amplitude en fase: de impedantie *Z*

Hoewel het waarschijnlijk vanuit de vergelijkingen niet direct duidelijk is heeft de spanning over een serieschakeling en de stroom door een parallelschakeling ook een zuivere sinusvorm, zij het dat deze in fase verschoven is ten opzichte van de stroom resp. spanning. In een vergelijking uitgedrukt geeft dit voor de serieschakeling van een weerstand en een condensator:

$$\begin{aligned} I &= I_0 \sin(\omega t) \\ U &= U_{0R} \sin(\omega t) - U_{0C} \cos(\omega t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{7.18a}$$

en voor de parallelschakeling van een weerstand en een spoel:

$$\begin{aligned} U &= U_0 \sin(\omega t) \\ I &= I_{0R} \sin(\omega t) - I_{0L} \cos(\omega t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \tag{7.18b}$$

Merk op dat de faseverschuivingen in vgl. (7.18a) en (7.18b) een verschillend teken hebben. Dat is om een éénduidig faseverschil te krijgen tussen spanning en stroom. In vgl. (7.18a) staat de fase in uitdrukking voor de spanning en in vgl. (7.18b) staat de fase in de uitdrukking voor de stroom. Als de spanning voorloopt op de stroom dan is de fase in vgl. (7.18a) positief. De stroom loopt dan achter op de spanning en de fase van de stroom is dan negatief. Het minteken in vgl. (7.18b) zorgt er dan voor dat de waarde van φ in vgl. (7.18b) hetzelfde is als in vgl. (7.18a). *Controleer zelf het geval dat de spanning achterloopt op de stroom.*

Uitwerking voor de serieschakeling van weerstand en condensator.

Dat een som van een sinus en cosinus als één sinus met faseverschuiving geschreven kan worden worden afgeleiden m.b.v. de volgende goniometrische relatie:

$$\sin(a+b) = \cos b \sin a + \sin b \cos a \tag{7.19}$$

Met $a = \omega t$ en $b = \varphi$ geldt voor de serieschakeling $U_{0R} = U_0\cos(\varphi)$ en $U_{0C} = -U_0\sin(\varphi)$. Hieruit volgt voor de totale spanningsamplitude en de fase tussen stroom en spanning direct de volgende relaties:

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0C}^2} = I_0\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2} \tag{7.20a}$$

$$\tan\varphi = \frac{U_{0C}}{U_{0R}} = -\frac{1}{\omega RC} \tag{7.20b}$$

Uitwerking voor de parallelschakeling van weerstand en spoel.

Met gebruik van $a = \omega t$ en $b = -\varphi$ volgt voor de *parallelschakeling* van weerstand en spoel $I_{0R} = I_0\cos\varphi$ en $I_{0L} = I_0\sin\varphi$. Voor de stroomamplitude en het faseverschil geldt dan:

$$I_0 = \sqrt{I_{0R}^2 + I_{0L}^2} = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \quad (7.21a)$$

$$\tan\varphi = \frac{I_{0L}}{I_{0R}} = \frac{R}{\omega L}. \quad (7.21b)$$

Oefeningen

- Leid de relatie tussen spannings- en stroomamplitude en de relatie voor de faseverschuiving af voor een weerstand in serie met een spoel.
- Leid de relatie tussen stroom- en spanningsamplitude en de relatie voor de faseverschuiving af voor een weerstand parallel aan een condensator.

7.4 Filters

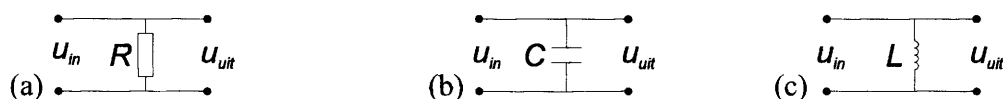
In het voorgaande is getoont dat het gedrag van zowel één als de combinatie van twee passieve componenten gekarakteriseerd kan worden d.m.v. een impedantie, bestaande uit een effectieve weerstand (het quotiënt van spannings- en stroomamplitude) en een faseverschil tussen stroom en spanning. Dit kan nog een stap verder uitgebreid worden.
Een impedantie kan uit een willekeurig aantal passieve lineaire componenten (R, L, C) bestaan. Net als bij de impedantie van één component kan deze *volledig* worden gekarakteriseerd door een effectieve weerstand en een faseverschil.

Wordt aan de ingang van een netwerk van lineaire passieve componenten een sinusoïdale spanning(stroom) aangeboden dan is er aan de uitgang ook een sinusoïdale spanning(stroom) aanwezig met dezelfde frequentie, maar, in het algemeen, met een andere amplitude en fase. De relatie tussen de amplitudes en de fases aan de ingang en uitgang wordt de overdrachtsfunctie genoemd. In principe kan zowel een overdrachtsfunctie voor de stroom als voor de spanning gedefinieerd worden. Hier wordt alleen de overdrachtsfunctie van het spanningssignaal bekeken.
De overdrachtsfunctie legt vast hoe het quotiënt van de amplitudes en het faseverschil tussen ingang en uitgang van de frequentie afhangen. Voor een ingangsspanning $u_{in} = \hat{u}_i \sin(\omega t + \varphi_i)$ en een uitgangsspanning $u_{uit} = \hat{u}_u \sin(\omega t + \varphi_u)$ wordt de overdrachtsfunctie gegeven door:

$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_u}{\hat{u}_i} \quad (7.22a)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_u - \varphi_i. \quad (7.22b)$$

Figuur 7.1 laat de eenvoudigste netwerken zien. Deze bestaan uit slechts één component. De overdrachtsfunctie is dan triviaal en voor alle netwerken hetzelfde: $A(\omega) = 1$ en $\varphi(\omega) = 0$.



Figuur 7.5 - 1-components netwerken

De eenvoudigste niet-triviale netwerken bestaan uit twee componenten. Als voorbeeld zijn hier de twee RC-netwerken in fig. 7.6 genomen: het laag-doorlaatfilter en het hoog-doorlaatfilter. De naamgeving wordt duidelijk na analyse van de overdrachtsfunctie.



Figuur 7.6 - (a) Laag-doorlaat filter, (b) Hoog-doorlaat filter

De ingangsstroom en de in- en uitgangsspanningen voor de netwerken in fig. 7.6 kan geschreven worden zoals aangegeven in vgl. (7.23).

$$I_{in} = \hat{I}_0 \sin(\omega t) \tag{7.23a}$$

$$u_{in} = \hat{u}_i \sin(\omega t + \varphi_i) \tag{7.23b}$$

$$u_{uit} = \hat{u}_u \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{7.23c}$$

Als de amplitudes en faseverschuivingen in vgl. (7.23) bekend zijn dan kan vgl. (7.22) gebruikt worden om de overdrachtsfunctie te bepalen.
Merk op dat in vgl. (7.23) de fase van de ingangsspanning en uitgangsspanning gedefinieerd zijn ten opzichte van de fase van de stroom (deze is nul genomen). Dit is handig in het geval van een serieschakeling van componenten zoals in de schakelingen van fig. 7.6. In het geval van een parallelschakeling kan het nuttig zijn om de fase van de stroom t.o.v. de spanning te definieren, aangezien de spanning over de componenten dan hetzelfde is.

Uitwerking voor laag-doorlaatfilter
Voor het laag-doorlaatfilter is de relatie tussen ingangsstroom en -spanning al eerder afgeleid (vgl. (7.18a) en (7.20)). Dit geeft voor de ingangsspanning:

$$\begin{aligned} u_{in} &= \hat{I}_0\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}\,\sin(\omega t + \varphi_i) \\ \varphi_i &= \arctan\left(\frac{-1}{\omega RC}\right) \end{aligned} \tag{7.24a}$$

De uitgangsspanning is de spanning over de condensator. Uit tabel 7.2 volgt:

$$\begin{aligned} u_{uit} &= \frac{\hat{I}_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi_u) \\ \varphi_u &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{7.24 b}$$

Merk op dat de fase in vgl. (7.24) voor beide spanningen t.o.v. de stroom is genomen. Dit is geen beperking omdat alleen het faseverschil tussen in- en uitgang van belang is. Vgl. (7.24) en (7.22) geven samen de overdrachtsfunctie van het laag-doorlaatfilter:

$$A(\omega)=\frac{\hat{u}_u}{\hat{u}_i}=\frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2+1/\omega^2C^2}}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2R^2C^2+1}}$$
$$\varphi(\omega)=\varphi_u-\varphi_i=-\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \qquad (7.25)$$

Voor lage en hoge frequenties is het limietgedrag van de overdrachtsfunctie voor $\omega \to 0$: $A(\omega) \to 1$ en $\varphi(\omega) \to 0$ en voor $\omega \to \infty$: $A(\omega) \to 0$ en $\varphi(\omega) \to -\pi/2$. Bij lage frequenties wordt het spanningssignaal doorgelaten en voor hoge frequenties wordt het signaal verzwakt. Vandaar de naam *laag-doorlaatfilter*. Bij lage frequenties is er geen faseverschil tussen in- en uitgang, terwijl bij hoge frequenties het faseverschil steeds negatiever wordt (met als limiet $-\pi/2$). Dit betekent dat bij hoge frequenties de uitgangsspanning achterloopt op de ingangsspanning, met een maximale achterstand van een kwart periode.

De frequentie waarbij $\omega = (RC)^{-1}$ wordt de *kantelfrequentie* (f_k) genoemd. f_k is de frequentie waarbij A serieus kleiner dan één wordt, bij toenemende frequentie. Hoewel f_k in principe ook anders gedefinieerd had kunnen worden is dit de standaarddefinitie. Aangezien $\omega = 2\pi f$ volgt $f_k = (2\pi RC)^{-1}$. Vgl. (7.25) kan nu ook geformuleerd worden in termen van f_k:

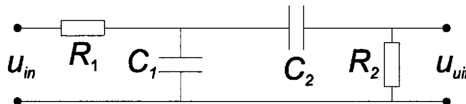
$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{1+(f/f_k)^2}}$$
$$\varphi(f)=-\frac{\pi}{2}+\arctan(f_k/f) \qquad (7.26)$$

Vgl. (7.25) heeft het voordeel dat de parameters direct gerelateerd zijn aan de componenten die gebruikt worden, terwijl vgl. (7.26) gebruik maakt van de *ontwerpparameter* kantelfrequentie. De 'versterking' bij de kantelfrequentie is gelijk aan $1/\sqrt{2}$. De versterking wordt vaak in *decibels* uitgedrukt: $H = 20\cdot{}^{10}\log(U_{uit}/U_{in})$. Hier is H de versterking in dB (=decibel). Bij de kantelfrequentie is de versterking dan $20\cdot{}^{10}\log(1/\sqrt{2}) = -3$ dB. (Zie ook paragraaf 7.6.3 De decibel)

Voor frequenties beduidend groter dan de kantelfrequentie kan de versterkingsfactor benaderd worden met $A(f) = f_k/f$. Voor een constante ingangsamplitude is de uitgangsamplitude evenredig met de versterkingsfactor. De verhouding van de uitgangsamplitude bij twee frequenties wordt dan gegeven door $A_2/A_1 = f_1/f_2$. De dB-waarde van deze amplitudeverhouding is dan $20{}^{10}\log(f_1/f_2)$. Een toename van één octaaf in frequentie, d.w.z. $f_2 = 2\cdot f_1$, geeft een amplitudeverandering van $20{}^{10}\log(1/2) = -6$ dB. De helling van de versterking van het laag-doorlaatfilter als functie van de frequentie is dus -6 dB/octaaf. Analoog geeft een toename van één decade in frequentie, d.w.z. een factor 10, een amplitudeverandering van -20 dB. De helling is dus -20 dB/decade. Merk op dat een verandering van -6 dB/octaaf gelijk is aan -20 dB/decade.

Oefening
Uitwerking voor het hoog-doorlaatfilter. Analoog aan het geval voor het laag-doorlaatfilter kan de overdrachtsfunctie afgeleid worden voor het hoog-doorlaatfilter. De uitgangsspanning is nu de spanning over de weerstand. *Leid de overdrachtsfunctie voor het hoog-doorlaatfilter af.*

Het bandfilter



Figuur 7.7 - Bandfilter opgebouwd uit een laag- en een hoog-doorlaatfilter

Door het combineren van een laag-doorlaatfilter met een hoog-doorlaatfilter, zoals getoond in fig. 7.7, kan een filter gemaakt worden die het signaal in een bepaalde frequentieband doorlaat. Hierbij wordt de kantelfrequentie van het laag-doorlaatfilter hoger gekozen dan dat van het hoog-doorlaatfilter.

De analyse van het bandfilter is een stuk lastiger dan van de aparte filters waar het uit opgebouwd is. De reden is dat het tweede filter het eerste filter belast, d.w.z. dat het tweede filter stroom trekt uit het eerste filter. Een gevolg hiervan is dat de spanning op de uitgang van het eerste filter anders zal zijn dan in het onbelaste geval. Met de sinusoïdaal analyse kan het effect van het 2^e filter op het gedrag van het 1^e filter wel in rekening gebracht worden, maar dat vraagt heel wat rekenwerk. Later in het practicum wordt het begrip complexe impedantie geïntroduceerd. In combinatie met de complexe rekenwijze maakt dat een veel eenvoudiger analyse mogelijk. Zonder de overdrachtsfunctie van het filter exact op te lossen kan wel een aardig idee gekregen worden van de eigenschappen van het filter. Het filter kan zelfs zo ontworpen worden dat de overdrachtsfuncties van de aparte filters gebruikt kunnen worden.
Als het bandfilter zo ontworpen wordt dat het 2^e filter geen stroom trekt uit het eerste filter, dan zijn de twee filters onafhankelijk en is de versterking gelijk aan het produkt van de versterkingen van de twee aparte filters. De faseverschuiving van het bandfilter wordt dan gegeven door de som van de faseverschuivingen van de aparte filters:

$$\begin{aligned} A_{band}(\omega) &= A_{laag}(\omega)A_{hoog}(\omega) \\ \varphi_{band}(\omega) &= \varphi_{laag}(\omega) + \varphi_{hoog}(\omega) \end{aligned} \tag{7.27}$$

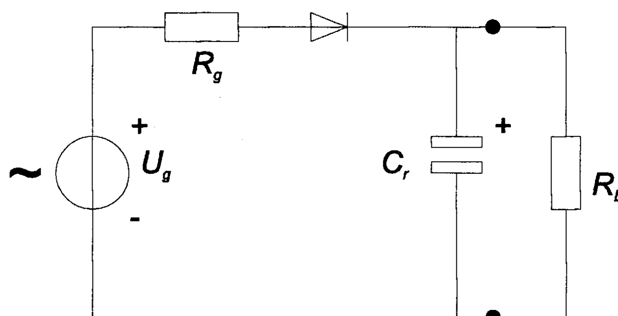
Zonder een exacte analyse te moeten maken kan een afschatting gemaakt worden hoe het bandfilter ontworpen moet worden opdat de overdrachtsfunctie in vgl. (7.27) van toepassing is. Hiertoe wordt eerst gekeken naar de gevolgen van het combineren van de twee filters.
De stroom die uit R_1 komt moet zich in het bandfilter verdelen over twee takken: C_1 en het 2^e filter. De tak met de kleinste effectieve weerstand zal het meeste stroom trekken. Dus als de effectieve weerstand van het 2^e filter klein is t.o.v. de effectieve weerstand van C_1, dan zal de meeste stroom door het 2^e filter lopen en zal het 1^e filter een heel andere uitgangsspanning hebben dan in het onbelaste geval. Vgl. (7.26) is dan onbruikbaar als overdrachtsfunctie voor het laag-doorlaatfilter. Omgekeerd, als de effectieve weerstand van het 2^e filter groot is t.o.v. die van C_1, dan zal door C_1 praktisch dezelfde stroom lopen als in het onbelaste geval en zal het 1^e filter zich gedragen als in het onbelaste geval. Dan is vgl. (7.27) een goede benadering van de overdrachtsfunctie van het bandfilter.
Hoe kan er een afschatting maken of vgl. (7.27) van toepassing is voor het bandfilter? Zoals hierboven al gezegd moet in dat geval de effectieve weerstand $|Z_2|$ van het 2^e filter veel groter zijn dan de effectieve weerstand $|Z_{C1}|$ van C_1: $|Z_2| >> |Z_{C1}|$. De effectieve weerstand van de condensator is $|Z_{C1}| = 1/\omega C_1$ en de effectieve weerstand van de weerstand en condensator van het 2^e filter is $|Z_2| = \sqrt{R_2^2 + 1/\omega^2 C_2^2}$.

De conditie $|Z_2| >> |Z_{C1}|$ gaat dan over in $\sqrt{R_2^2 + 1/\omega^2 C_2^2} >> 1/\omega C_1$. Hieruit volgt $\sqrt{\omega^2 C_1^2 R_2^2 + C_1^2/C_2^2} >> 1$, waaraan is voldaan als $R_2 >> 1/\omega C_1$ en/of $C_1 >> C_2$. Met deze ongelijkheden kan getoetst worden of de overdrachtsfunctie van vgl. (7.27) gebruikt mag worden.
Als de twee filters verwisseld worden dan kan een analoge analyse als hierboven gemaakt worden, waarbij de totale effectieve weerstand van het laag-doorlaatfilter vergeleken wordt met de waarde van de weerstand in het hoog-doorlaatfilter.

7.5 Gelijkrichtschakeling

Gelijkrichting is het omzetten van een wisselspanning(-stroom) in een gelijkspanning(-stroom). Dit is een belangrijke stap, omdat de meeste elektronica op gelijkspanning werkt en het elektriciteitstransport d.m.v. wisselstroom plaatsvindt.
De diode is het meest essentiële onderdeel van een gelijkrichter. De gelijkrichting vindt plaats doordat de diode slechts in één richting stroom doorlaat. In de tegenovergestelde richting (de sperrichting) loopt slechts een zeer kleine stroom. De doorlaatrichting van de stroom wordt aangegeven door de richting van de pijl in het diode symbool.

In een zgn. enkelfasige gelijkrichter, getekend in fig. (7.8), is de spanning over de belasting (U_b) gelijk aan de spanning over de condensator (U_C). De AC-spanningsbron heeft een amplitude U_g en een inwendige weerstand R_g.

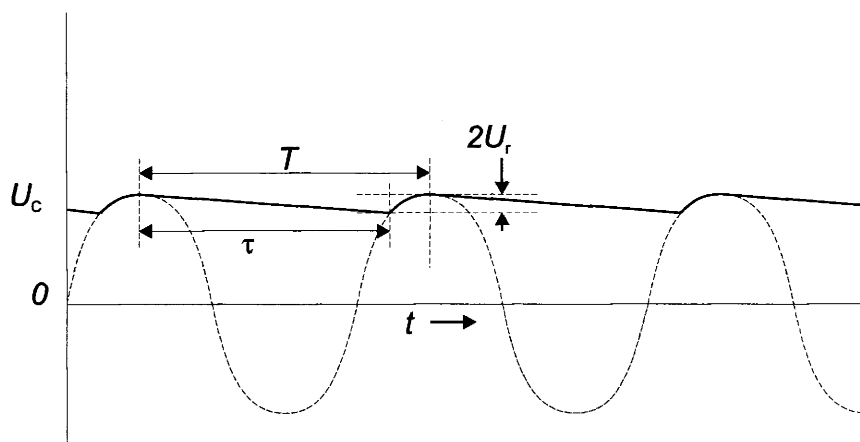


Figuur 7.8 - Enkelfasige gelijkrichter met reservoircondensator (C_r) en belasting (R_b).

De werking van de gelijkrichter kan als volgt beschreven worden. Als $U_g > 0$ en $U_g > U_C$, dan staat de spanning over de diode in voorwaartse richting en loopt er een stroom die de condensator oplaadt. Als U_g kleiner wordt dan U_C is de diode gesperd. De condensator kan dan alleen ontladen over de belasting R_b.

De condensator fungeert als een reservoir en levert stroom aan de belasting in de tijd dat de diode gesperd is. De condensator wordt daarom ook wel *reservoircondensator* genoemd. Fig. (7.9) laat het gedrag van U_C zien als functie van de tijd (getrokken lijn). De gestippelde curve is U_g als functie van de tijd. Het opladen van de condensator gebeurt in het korte stijgende deel van de curve, het ontladen in het lange dalende deel. Merk op dat de daling overgaat in een stijging op het moment dat U_g groter wordt dan U_C. Het ontladen van de condensator vindt plaats in het tijdsinterval met lengte τ. De amplitude U_r van de rimpel op de DC-spanning wordt gedefinieerd als de helft van het verschil tussen maximum en minimum waarde van U_C. De DC-spanning wordt gedefinieerd als de gemiddelde waarde van de spanning

U_C. In het geval dat R_b oneindig is (de gelijkrichter is dan onbelast) ontlaadt de condensator niet en is de DC-spanning gelijk aan het maximum van U_g.



Figuur 7.9 - Spanningsverloop over de reservoircondensator (en belastingsweerstand). De gestreepte curve geeft het verloop van de generatorspanning aan. Hierbij is de spanningsval over R_g en de diode verwaarloosd

De hoeveelheid lading die tijdens het ontladen onttrokken wordt aan de condensator is bij benadering gelijk aan de stroom door de belasting I_b vermenigvuldigd met de ontlaadtijd τ: $\Delta Q = I_b \cdot \tau$. De spanning zakt dan in met een waarde $\Delta U = \Delta Q/C_r$. Aangezien $\Delta U = 2U_r$ geldt voor de rimpelspanning: $U_r = \Delta Q/(2C_r) = I_b\tau/(2C_r)$. Zoals uit fig. 7.9 blijkt is τ bij benadering gelijk aan de periode van de AC-spanning. Deze benadering wordt beter naarmate de condensator minder ontlaadt (dus voor grotere waarden van R_b). Met $\tau \approx 1/f$ geldt voor de rimpelspanning:

$$U_r \approx \frac{I_b}{2fC_r} \approx \frac{U_b}{2fR_bC_r} \qquad (7.28)$$

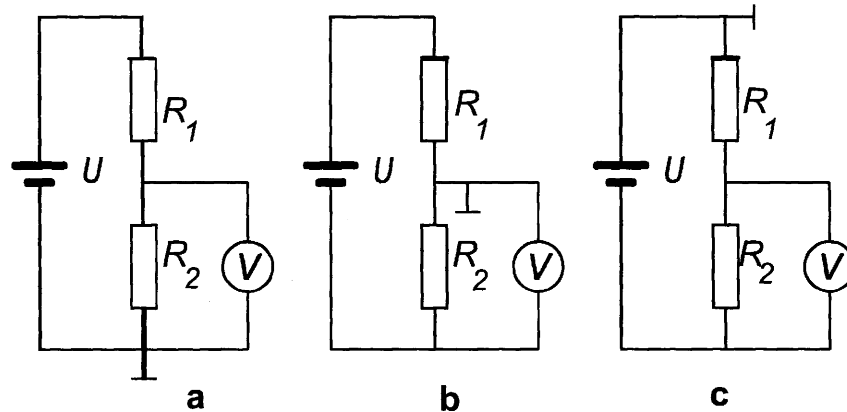
Het ontladen van de condensator gaat sneller naarmate R_b kleiner en dus de belastingstroom I_b groter is. De spanning over R_b zakt dan sneller in, de rimpel U_r wordt groter en de ontlaadcurve gaat afwijken van het lineaire gedrag uit fig. 7.9. Hoewel de bovenstaande benadering voor U_r dan minder goed wordt, kan hij altijd gebruikt worden om een afschatting te maken van de grootte van U_r.

7.6 Enkele apparatuurzaken

7.6.1 Aardingsconflicten

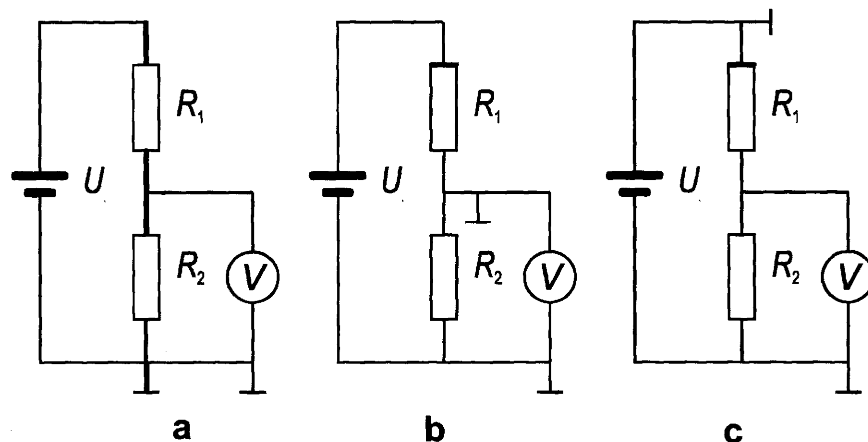
Voor de eigenschappen van elektrische circuits en componenten zijn alleen de potentiaal*verschillen* van belang. Als we alle potentialen in een circuit met 1000 volt verhogen blijft het circuit zich op dezelfde manier gedragen.
Het wordt anders als we twee circuits gaan koppelen. Als het éne circuit op een gemiddeld 1000 volt hogere spanning ligt dan het andere gaat er een zeer grote stroom lopen als we ze verbinden. Omdat elektrische verbindingen normaal gesproken een lage weerstand hebben kunnen er ook bij kleinere potentiaalverschillen behoorlijke stromen lopen. Met wat pech kan de stroom door één of meer van de elektrische componenten lopen. Veel elektronische componenten kunnen niet tegen grote stromen en gaan dan stuk. Om deze reden worden de meeste elektrische schakelingen met een referentie spanning verbonden: de zogenaamde *aarde*. Zo'n

schakeling heet dan *geaard.* Een aardpunt in een schakeling wordt aangegeven met het symbool ⊥. Het spanningsniveau van de aarde is (per definitie) 0V. Figuur 7.10 laat een schakeling zien die op drie manieren geaard is. Zowel de spanningsbron als de voltmeter in de schakeling is **niet** geaard.



Figuur 7.10 - schakeling die op drie manieren geaard is. De spanningsbron en voltmeter zijn niet geaard.

Als we in de drie gevallen het potentiaalverschil meten over weerstand R_2 zullen we dezelfde waarde vinden. Als we nu een voltmeter gebruiken die wel geaard is dan krijgen we de situatie zoals in figuur 7.11.
Om nu de invloed van de aanwezigheid van meer dan één aardpunt na te gaan moeten we ons eerst realiseren wat de consequentie van een aardpunt is. Omdat ieder aardpunt dezelfde spanning heeft (0V) is het net alsof alle aardpunten *met weerstand nul* met elkaar verbonden zijn. De twee aardpunten in de schakelingen van figuur 7.11 leveren in twee van de drie gevallen problemen op. In schakeling a gebeurt er niets omdat de twee aardpunten al via



Figuur 7.11 - schakeling die op drie manieren geaard is. De spanningsbron is niet en de voltmeter is wel geaard.

een kortsluiting met elkaar verbonden zijn. Schakeling b levert een probleem op. Beide aansluitklemmen van de voltmeter liggen aan aarde en de voltmeter zal dus geen spanning meten. Omdat weerstand R_2 aan beide kanten dezelfde spanning heeft zal er ook geen stroom door R_2 lopen. De spanningsbron heeft nu alleen R_1 nog als belasting, dus de stroom die geleverd

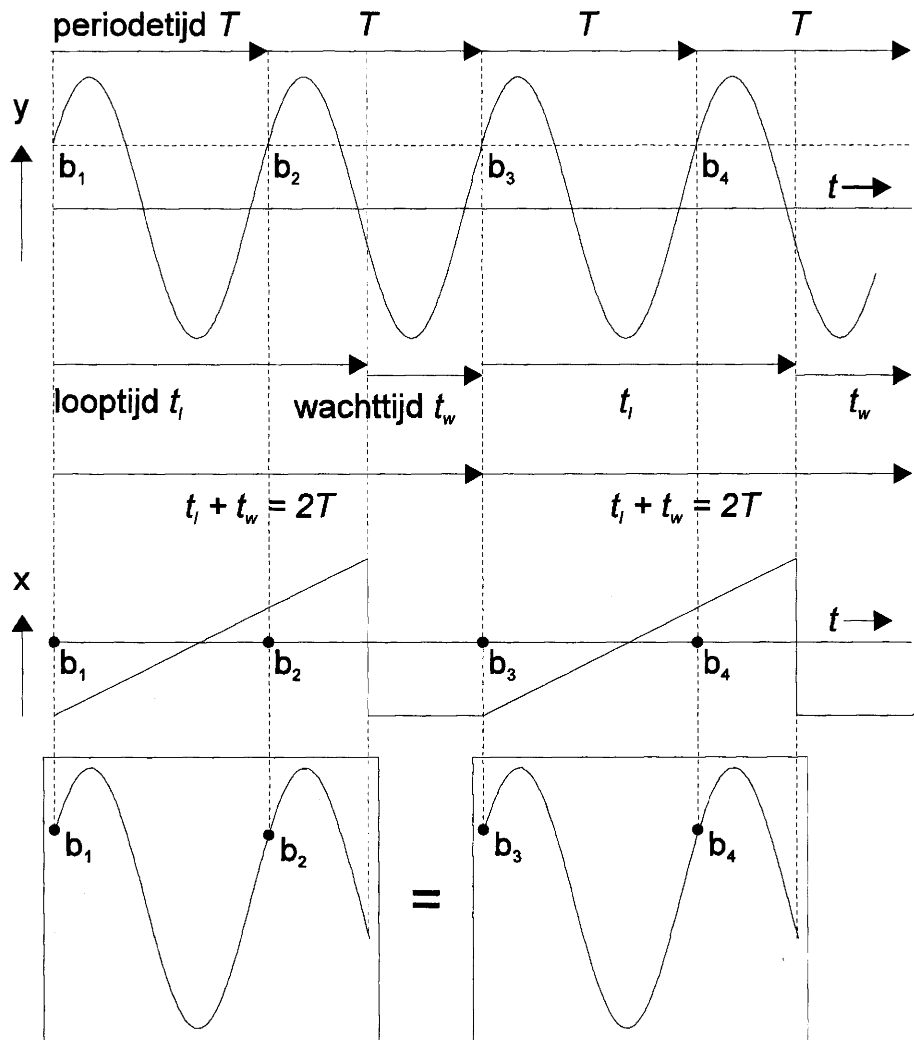
moet worden is groter dan voor de schakeling in figuur 7.10. In het geval van schakeling c liggen beide aansluitklemmen van de spanningsbron aan dezelfde spanning. Hierdoor zijn de twee weerstanden kortgesloten en loopt er geen stroom door. De spanning over R_2 zal dus nul zijn. Omdat de aansluitklemmen van de spanningsbron op dezelfde waarde worden gehouden zal de spanningsbron proberen, door stroom te gaan leveren, om weer op zijn eigen waarde te komen. Tenzij de spanningsbron beveiligd is tegen zo'n grote stroom zal dit de spanningsbron onherstelbaar beschadigen. Samenvattend kunnen we zeggen dat in het geval van de schakeling in figuur 7.11 er slechts één goede manier is om de schakeling een extra aardpunt te geven. In het algemeen zullen we het aantal punten dat een schakeling geaard is tot een minimum willen beperken (d.w.z. in één punt).
Hoewel schakelingen en/of apparatuur niet altijd kapot hoeven te gaan in het geval van aardconflicten, wordt de werking van de schakeling wel beïnvloed. Omdat veel elektronische instrumenten geaard zijn is een aardingsconflict snel gemaakt, zelfs al heb je zelf geen aardpunten aan de schakeling toegevoegd. Het is zaak om de instrumenten zodanig aan te sluiten dat de aarding geen ongewenste aardconflicten en kortsluitingen veroorzaakt.

7.6.2 Triggering

Een oscilloscoop wordt in het algemeen gebruikt om signalen y(t), die zichzelf periodiek herhalen, als functie van de tijd zichtbaar te maken. Die signalen worden op de y-ingang van de oscilloscoop aangesloten. Op de x-as dient dan een signaal te komen, dat lineair oploopt in de tijd (x is immers een "t-as") en waarbij er bovendien voor gezorgd wordt dat elk nieuw geschreven signaal over het oude signaal heen komt.

Van belang hierbij is het *synchroniseren* van beide signalen, het juist kiezen van de starttijdstippen waarop het (herhaald) schrijven begint. Dit synchronisatieproces heet de *triggering*. Het principe wordt toegelicht in figuur 7.12, die verder voor zichzelf spreekt.

De x-spanning, die in de oscilloscoop zelf wordt opgewekt, heet naar de vorm wel *zaagtandspanning*. Het onderdeel (schakeling) in de oscilloscoop die dit realiseert, wordt de *tijdbasis* genoemd. De precieze tijdsintervallen van de zaagtand worden mede bepaald door het ingangssignaal, de globale instelling ervan is in te stellen met de knop die meestal het opschrift "*time base*" of "*time/div*" heeft.



Figuur 7.12 - Het principe van triggering.

(a) De frequentie van de zaagtand en het triggerniveau($b_1,...,b_4$) kunnen worden ingesteld.

(b) Looptijd + wachttijd = nT (hier n=2).

(c) Iedere periode ontstaat hetzelfde beeld

7.6.3 De decibel.

In veel situaties is niet de spanning of de stroom de belangrijkste grootheid maar het vermogen. Vaak kan het vermogen over meerdere ordes van grootte (d.w.z. factoren 10) variëren. Het uitzetten van vermogensverhoudingen op een lineaire schaal is dan onhandig. In zo'n geval wordt de vermogensverhouding op een logaritmische schaal uitgezet. De decibel is een logaritmische maat voor vermogensverhoudingen. De bel (= 10 decibel) wordt zelden gebruikt. Het symbool voor de decibel is dB. De decibel is gedefinieerd als 10 keer de logaritme (met grondtal 10) van de vermogensverhouding P_2/P_1:

$$H = 10\,{}^{10}\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (7.29)$$

In een aantal gevallen wordt de dB niet alleen gebruikt voor het aangeven van verhoudingen. Als P_1 een bekende referentiewaarde is , geeft de dB een absolute waarde aan. Het bekendste voorbeeld is misschien wel het gebruik van de dB als geluidsniveau. Voor P_1 wordt dan de gevoeligheidsgrens van het menselijk oor gebruikt.
I.p.v. vermogensverhoudingen wordt de decibel ook vaak gebruikt voor het aangeven van verhoudingen van andere grootheden. Hieronder zijn ook amplitudeverhoudingen. Tussen vermogen en amplituden van fysische grootheden bestaat bij lineaire systemen een kwadratisch verband. Zo is het elektrische vermogen dat in een weerstand gedissipeerd wordt gelijk aan $P = U \cdot I = I^2 R = U^2/R$. De verhouding van twee vermogens, *betrokken op dezelfde weerstand (of impedantie)* wordt dan $P_2/P_1 = I_2^2/I_1^2 = U_2^2/U_1^2$. Voor de amplitudeverhouding volgt hieruit:

$$H = 20^{10}\log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \qquad (7.30)$$

In vgl. (7.30) wordt de vermogensverhouding in dB bepaald vanuit de amplitudeverhouding. *Dit is alleen juist onder de voorwaarde dat de vermogens betrokken worden op dezelfde impedantie.* In de regel wordt er bij het berekenen van amplitudeverhoudingen niet op deze voorwaarde gelet. In dat geval is de dB-waarde uit vgl. (7.30) alleen een maat voor de amplitudeverhouding en kan deze niet geïnterpreteerd worden als vermogensverhouding.

Voorbeeld: het laag-doorlaatfilter
De versterking van het laag-doorlaatfilter bij de kantelfrequentie is, volgens de definitie,
-3 dB. De amplitudeverhouding tussen in- en uitgang is in het kantelpunt dus $1/\sqrt{2}$. Aangezien de spanningsamplituden op de in- en uitgang niet op dezelfde impedantie betrekking hebben kan de waarde -3 dB niet geïnterpreteerd worden als het van de ingang naar de uitgang doorgegeven vermogen.

8 Op-Amp schakelingen

8.1 Inleiding

De operationele versterker (= operational amplifier = op-amp) is een geïntegreerde versterker, opgebouwd uit vele transistoren. Hoewel een enkele transistor al als versterker gebruikt kan worden, heeft de op-amp enkele voordelen boven de transistor. Bij de op-amp is vooral geprobeerd om te corrigeren voor niet-ideale eigenschappen van de enkele transistor. Ook is het mogelijk om met een op-amp veel grotere versterkingen te realiseren dan met een enkele transistor. Voor wie meer gedetailleerd kennis wil nemen van de principes van elektronische schakelingen zijn aan het eind van dit hoofdstuk een aantal referenties opgenomen. Vooral het boek van Horowitz en Hill is de moeite waard.

De op-amp heeft *kaal* een zeer grote versterking, in orde van 10^5 - 10^6 en wordt meestal gevoed uit een symmetrische spanningsbron met drie *uitgangen* die -15, 0 en +15 volt leveren. De -15 en +15 volt uitgangen verzorgen de eigenlijke voeding van de op-amp. Hoewel de 0V uitgang voor de meeste op-amps niet echt nodig is wordt 0 volt meestal gebruikt als *referentiespanning* voor de ingangen en de uitgang, d.w.z. dat de ingangs- en uitgangsspanningen t.o.v. 0 volt gedefinieerd worden. De meeste elektronica, denk hierbij bijvoorbeeld aan de functiegenerator en oscilloscoop, gaat er zelfs vanuit dat één van de twee aansluitingen van de ingang of uitgang op 0 volt ligt.

Het *werkgebied* van de meeste op-amps ligt tussen -13 en +13 volt. Als de uitgang of ingang buiten dit bereik komt dan raakt de op-amp *overstuurd* en gedraagt zich niet meer als versterker. Het is dus zaak om er voor te zorgen dat een op-amp binnen zijn werkgebied blijft.

8.2 Terugkoppeling (Feedback)

Als voorbeeld voor het principe (en nut) van terugkoppeling wordt het voorbeeld van een pan met water op een gasfornuis genomen. Bij zo'n pan is het op een gewoon fornuis onmogelijk om de eindtemperatuur van het water op (80 ± 1) °C te houden. Als je probeert om de gasvlam zo in te stellen dat de eindtemperatuur 80 °C wordt, krijg je dit niet goed voor elkaar. Zelf als het lukt, zal een volgende keer de eindtemperatuur anders zijn. Dit komt doordat de omstandigheden, zoals onder andere de omgevingstemperatuur, altijd iets zullen verschillen. Een ander probleem is de gevoeligheid van de regeling van het systeem, een kleine verandering in de stand van de gasknop geeft een groot verschil in eindtemperatuur. Het probleem kan opgelost worden door in de pan een sensor te plaatsen die de temperatuur registreert. Door de waarde van de temperatuur de stand van de gasknop te laten beïnvloeden kan de temperatuur in de pan geregeld worden. Als de temperatuur te laag wordt gaat de gasknop iets verder open, als de temperatuur te hoog wordt gaat de gasknop iets verder dicht. De temperatuur is nu *teruggekoppeld* naar de gasknop. Merk op dat er een *tekenomkering* in de terugkoppeling zit: een verhoging van de temperatuur leidt tot een verlaging van de gasstroom. Vanwege de tekenomkering spreken we van *negatieve terugkoppeling.*

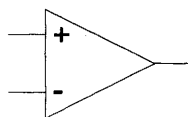
Negatieve terugkoppeling (vaak ook kortweg terugkoppeling genoemd) is dus het proces waarbij een deel van het uitgangssignaal wordt gebruikt om een deel van het ingangssignaal te compenseren. Dat lijkt misschien niet zo slim omdat daardoor de versterking van een versterker afneemt. Echter, in ruil daarvoor verbeteren andere eigenschappen van de versterker. Met name de vervorming neemt af, de lineariteit wordt beter en het gedrag van de teruggekoppelde

versterker kan onder veel omstandigheden beter voorspeld worden. Het laatste is vooral van belang bij het ontwerp van elektronische schakelingen.

Naarmate de negatieve terugkoppeling sterker wordt, d.w.z. naarmate een steeds groter deel van het ingangssignaal gecompenseerd wordt, worden de eigenschappen van de resulterende versterker minder afhankelijk van de 'open-lus' (= niet teruggekoppelde) versterker, waarbij uiteindelijk de versterkerkarakteristieken volledig door de eigenschappen van het terugkoppelnetwerk bepaald worden. Het terugkoppelnetwerk is de verzameling elektronische componenten die de uitgang met de ingang verbindt.
Over het algemeen wordt de eigenschap die gebruikt wordt om de terugkoppeling te bewerkstelligen de eigenschap waarvan het gedrag verbeterd moet worden. Dus als de uitgangsspanning van de schakeling gebruikt om het terugkoppelsignaal te leveren, dan gaat de schakeling zich als ideale spanningsbron gedragen. Eén van de consequenties hiervan is dat de uitgangsimpedantie van de schakeling zeer klein wordt. Als de uitgangsstroom gebruikt wordt om het terugkoppelsignaal te leveren, dan gaat de schakeling zich als ideale stroombron gedragen. De uitgangsimpedantie wordt dan juist zeer groot.

8.3 Operationele versterkers (Op-amps)

Op-amps zijn differentiële versterkers met heel grote versterking. De op-amp heeft een typische versterkingsfactor van 10^5 - 10^6, een grote ingangsimpedantie en een kleine uitgangsimpedantie. Operationele versterkers zijn er in letterlijk honderden soorten en worden aangeduid met het universele symbool in figuur 8.1. De (+) en (-) ingang doen precies wat je zou verwachten: de uitgang wordt positief als de spanning op de (+) ingang groter is dan die op de (-). Omgekeerd wordt de uitgang negatief als de (+) ingang lager is dan de (-) ingang. De (+) en (-) symbolen betekenen dus **niet** dat je de ene positief moet houden t.o.v. de andere. Het gebruik van *niet-inverterende* en *inverterende* in plaats van *plus* en *min* zal ons helpen de verwarring tegen te gaan.

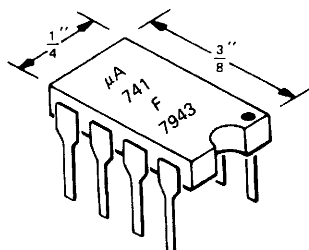


Figuur 8.1 - Op-amp symbool

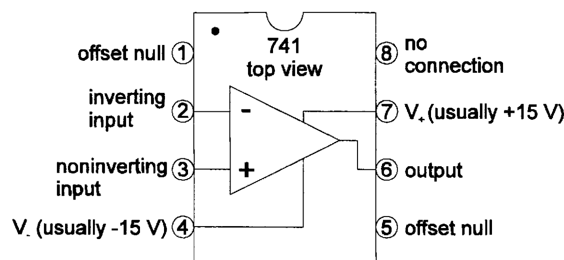
De aansluitingen van de voeding (typisch +/-15 volt) worden meestal niet aangegeven. De op-amp zelf heeft geen aardaansluiting. Er is wel een (externe) aarde nodig als referentie voor de in- en uitgangsspanningen. Over het algemeen zorgt de voeding voor deze referentie van 0V. Op-amps hebben een gigantische versterking en worden *nooit* zonder terugkoppeling gebruikt. De *open-lus* versterking (d.w.z. zonder terugkoppeling) is zo groot dat, voor elke redelijke *gesloten-lus* versterking (d.w.z. met terugkoppeling), de karakteristieken alleen door het terugkoppelnetwerk bepaald worden. Het is vanzelfsprekend dat op een bepaald niveau van analyse deze generalisaties niet meer op gaan. We zullen beginnen met een naïef beeld van het op-amp gedrag en zullen in een later stadium, voor zover nodig, ingaan op de fijnere details.

De meest voorkomende op-amp is de µA741C, of kortweg de 741. Het is verpakt in een zgn. mini-dip (dual in-line package, zie figuur 8.2). De 741 is erg populair vanwege de goede ei-

genschappen, de eenvoudige toepasbaarheid, de lage prijs en de goede verkrijgbaarheid. De elektrische aansluitingen (pootjes) zijn te zien in figuur 8.3.
De zwarte stip in de linker bovenhoek, of de uitsparing aan het uiteinde, geeft de kant aan vanwaar de pootjes genummerd worden. Zoals bij de meeste elektronische verpakkingen worden de pootjes tegen de klok in geteld (van boven af op de verpakking gekeken). De *off-set-null* aansluitingen zijn er voor om, indien nodig, extern de kleine onvermijdelijke asymmetrie in de op-amp te kunnen corrigeren.



Figuur 8.2 - Mini-DIP geïntegreerd circuit



Figuur 8.3 - Aansluitingen van de 741 op-amp in een mini-dip verpakking

8.4 De ideale op-amp

8.4.1 Ideaal op-amp gedrag

Hieronder volgen twee eenvoudige ontwerpregels waarmee het gedrag van een op-amp schakeling bepaald kan worden. Met deze regels kunnen veel schakelingen voldoende nauwkeurig geanalyseerd worden.
Ten eerste, de versterkingsfactor van de op-amp zelf is zo groot dat een fractie van een millivolt al voldoende is om de uitgang te oversturen (d.w.z. buiten zijn werkbereik te brengen). Verwaarlozen van dit kleine spanningsverschil levert de eerste regel:

Regel 1:	De uitgang probeert zich zo in te stellen dat het spanningsverschil tussen de twee ingangen nul is.

Ten tweede, trekt (of levert) de ingang van een op-amp erg weinig stroom (typisch 0.08 μA voor de 741; picoampères voor FET-ingangen). Afronden naar nul levert de tweede regel:

Regel 2:	De ingangen trekken (of leveren) geen stroom.

Eén punt van verduidelijking: Regel 1 betekent niet dat de op-amp de spanning aan de ingang aanpast. Dat kan de op-amp niet. (Hoe zou dat kunnen en toch consistent blijven met Regel 2?) Wat de op-amp doet is 'kijken' naar de ingangen en dan de uitgang zodanig aanpassen dat het terugkoppelnetwerk het spanningsverschil tussen de ingangen (zo mogelijk) nul maakt.
Deze twee ontwerpregels zijn voldoende voor een breed scala aan schakelingen. In de volgende paragraaf worden ze geïllustreerd aan de hand van een aantal belangrijke op-amp schakelingen. Later wordt nog ingegaan op het geldigheidsbereik van deze twee ontwerpregels. Zoals later zal worden onderbouwd is bijvoorbeeld de weerstandskeuze in de terugkoppeling beperkt tot een bereik van typisch 2 kΩ tot 1 MΩ.

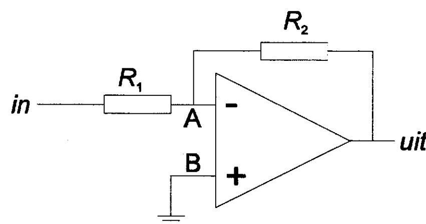
8.4.2 Ontwerpen met een ideale op-amp

De inverterende versterker

De eerste schakeling wordt getoond in figuur 8.4. De analyse is rechttoe rechtaan als de twee ontwerpregels worden gehanteerd:

1. Punt B ligt aan aarde. Uit Regel 1 volgt dan dat punt A dezelfde spanning heeft.
2. Hieruit volgt (1) dat de spanning over R_2 gelijk is aan U_{uit} en (2) dat de spanning over R_1 gelijk is aan U_{in}.
3. Dus, gebruikmakend van Regel 2, volgt dat $U_{uit}/R_2 = -U_{in}/R_1$. Met andere woorden, de spanningsversterking is $A = U_{uit}/U_{in} = -R_2/R_1$.

Later zal blijken dat het meestal beter is om punt B niet direct aan aarde te leggen, maar via een weerstand (dat is een gevolg van één van de niet-ideale eigenschappen van de op-amp).



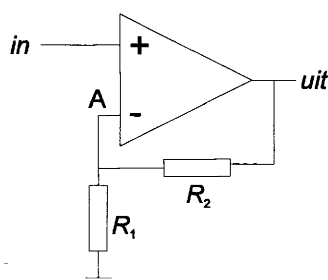
Figuur 8.4 - De inverterende versterker

De analyse lijkt haast te eenvoudig. In een bepaald opzicht verhult hij wat er eigenlijk gebeurt. Om te begrijpen hoe de terugkoppeling werkt kijken we wat er gebeurt als we een bepaalde spanning, zeg 1V, aan de ingang aanbieden. Voor de duidelijkheid nemen we aan dat R_1 gelijk is aan 10 kΩ en R_2 gelijk is aan 100 kΩ. Stel nu dat de uitgang niet de 'juiste' waarde heeft en 0V is. Wat gebeurt er dan? R_1 en R_2 vormen een spanningsdeler, die de inverterende ingang op +0.91 volt houdt. De op-amp ziet een enorme onbalans tussen de twee ingangen, waardoor de uitgang gedwongen wordt negatief te worden. De uitgang wordt negatiever totdat hij -10 volt is. Op dat ogenblik staat op de twee ingangen dezelfde spanning, namelijk 0V. Analoog zal iedere tendens van de uitgang om negatiever worden dan -10 volt er voor zorgen dat de inverterende ingang onder de 0 volt trekken, waardoor de uitgangsspanning weer toeneemt.

Wat is de ingangsimpedantie van deze versterker? De ingangsimpedantie is eenvoudig het quotiënt van de ingangsspanning en de ingangsstroom: $Z_{in} = U_{in}/I_{in}$. Aangezien punt A altijd nul volt is (ook wel *virtuele aarde* genoemd) is de ingangsstroom gelijk aan U_{in}/R_1 en dus volgt dat $Z_{in} = R_1$. De uitgangsimpedantie is een fractie van een ohm. Omdat de afleiding veel lastiger is laten we deze hier niet zien.

Merk op dat bovenstaande analyse zowel voor gelijkspanning als wisselspanning opgaat. Het is een *DC-* of *gelijkspannningsversterker*. Dit houdt niet in dat de versterker alleen gelijkspanningen versterkt, maar dat de versterker *ook* gelijkspanningen versterkt.
De ene ongewenste eigenschap van deze inverterende versterker is de lage ingangsimpedantie, met name voor grote versterkingsfactoren waarbij R_1 meestal vrij klein is. Dit probleem wordt verholpen in de volgende schakeling (figuur 8.5).

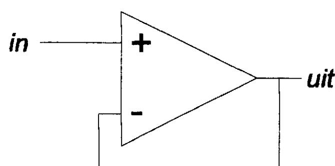
De niet-inverterende versterker



Figuur 8.5 - De niet-inverterende versterker

De analyse van de schakeling in figuur 8.5 is weer de eenvoud zelve: $U_A = U_{in}$. Aangezien U_A van de spanningsdeler komt geldt: $U_A = U_{uit}R_1/(R_1 + R_2)$. Met het voorgaande volgt direct: $A = U_{uit}/U_{in} = 1 + R_2/R_1$. Dit is een *niet-inverterende* versterker. In de benadering die hier gebruikt wordt (die van de ideale op-amp) is de ingangsimpedantie oneindig. Met een 741 zou het op z'n minst honderden Megaohms zijn en met een FET-op-amp kan $Z_{in} \approx 10^{12}$ Ω of meer hebben. De uitgangsimpedantie is nog steeds een fractie van een ohm. Ook deze schakeling is een DC-versterker.
Een bijzonder geval van de niet-inverterende versterker is de spanningsvolger uit figuur 8.6.

De spanningsvolger



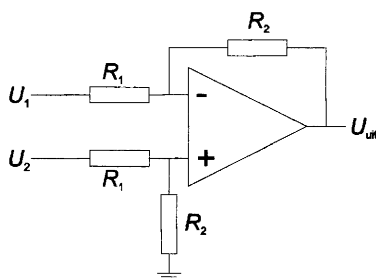
Figuur 8.6 - De spanningsvolger of bufferversterker

Figuur 8.6 toont de op-amp versie van de spanningsvolger. Het is een niet-inverterende versterker met R_1 oneindig en R_2 nul. De resulterende versterking is 1. Een versterker met versterking 1 wordt ook wel buffer genoemd vanwege zijn *isolerende* eigenschappen (hoge ingangsimpedantie en lage uitgangsimpedantie).

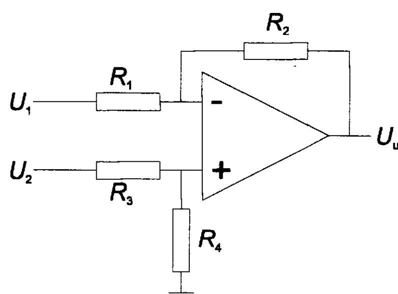
8.4.3 Diverse op-amp schakelingen

De differentiële versterker

De schakeling in figuur 8.7 is een differentiële versterker met versterking $A = U_{uit}/(U_1-U_2) = -R_2/R_1$. Echter, de weerstanden moet paarsgewijs exact gelijk zijn om een hoge common mode rejection ratio te krijgen. Waarom dit zo is volgt uit de analyse van dezelfde schakeling met vier verschillende weerstanden in figuur 8.8.



Figuur 8.7 - Differentiële versterker



Figuur 8.8 - Algemene versterkerschakeling

Volgens de tweede ontwerpregel wordt de spanning u_- op de inverterende ingang gegeven door

$$u_- = U_1 + \left(U_{uit} - U_1\right)\frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_{uit}\frac{R_1}{R_1 + R_2} + U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{8.1}$$

en de spanning op de niet-inverterende ingang van de op-amp door

$$u_+ = U_2\frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{8.2}$$

Uit de eerste ontwerpregel volgt

$$U_{uit}\frac{R_1}{R_1 + R_2} + U_1\frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_2\frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{8.3}$$

wat herschreven kan worden tot

$$U_{uit} = -U_1\frac{R_2}{R_1} + U_2\frac{R_4}{R_1}\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \tag{8.4}$$

Deze formule beschrijft alle versterkers die we tot nu toe bekeken hebben.
Omdat we met name in de *differentiële* en *common mode* versterkingseigenschappen geïnteresseerd zijn herschrijven we vgl. (8.4) in de volgende vorm

$$U_{uit} = -U_1\frac{R_2}{R_1} + U_2\frac{R_4}{R_1}\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} + U_2\frac{R_2}{R_1} - U_2\frac{R_2}{R_1} \tag{8.5}$$

waaruit volgt dat

$$U_{uit} = -\left(U_1 - U_2\right)\frac{R_2}{R_1} + U_2\left(\frac{R_4}{R_1}\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1}\right) \tag{8.6}$$

Met de definitie van de differentiële ingangsspanning $U_d = U_1 - U_2$ en de common mode ingangsspanning $U_c = U_2$ gaat dit over in

$$U_{uit} = -U_d\frac{R_2}{R_1} + U_c\left(\frac{R_4\left(R_1 + R_2\right) - R_2\left(R_3 + R_4\right)}{R_1\left(R_3 + R_4\right)}\right) = -U_d\frac{R_2}{R_1} + U_c\left(\frac{R_4R_1 - R_2R_3}{R_1\left(R_3 + R_4\right)}\right) \tag{8.7}$$

Met de definitie van de differentiële versterking A_d en common mode versterking A_c kan de uitgangsspanning geschreven worden als

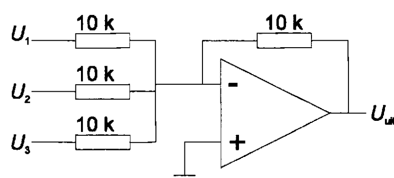
$$U_{uit} = U_dA_d + U_cA_c \tag{8.8}$$

met

$$A_d = -\frac{R_2}{R_1} \text{ en } A_c = \left(\frac{R_4R_1 - R_2R_3}{R_1(R_3 + R_4)}\right) \tag{8.9}$$

De common mode versterking wordt nul als $R_4R_1 = R_2R_3$, ofwel als $R_2/R_1 = R_4/R_3$. De Common Mode Rejection Ratio (CMRR (in dB) = $20\cdot{}^{10}\log(A_c/A_d)$) hangt dus af van hoe goed de weerstandsverhoudingen op elkaar afgestemd kunnen worden. Voor een versterker waarvan alle weerstanden een tolerantie van 1% hebben is $A_c \approx 0.01A_d$ en is de CMRR = $20\cdot{}^{10}\log(A_c/A_d)$ = -40 dB. Voor weerstanden met een tolerantie van 0.01% wordt de CMRR -80 dB.

De optelversterker



Figuur 8.9 - Optelversterker

De schakeling uit figuur 8.9 is een variant op de inverterende versterker. De inverterende ingang is een virtuele aarde (Regel 1), zodat de ingangsstroom gegeven wordt door $U_1/10\text{k} + U_2/10\text{k} + U_3/10\text{k}$. Hieruit volgt dat $U_{uit} = -(U_1 + U_2 + U_3)$. Merk op dat de ingangsspanningen zowel positief als negatief kunnen zijn. Ook de weerstanden hoeven niet gelijk te zijn. Als ze ongelijk zijn wordt de uitgangsspanning een gewogen som van de ingangsspanningen.

Voorbeeld:
Als voorbeeld van het gebruik wordt een optelversterker bekeken met 4 ingangsspanningen, van +1 of 0 volt, die de binaire waarden 1, 2, 4 en 8 representeren. Door 4 ingangsweerstanden van respectievelijk 10kΩ, 5kΩ, 2.5kΩ en 1.25kΩ te gebruiken wordt de uitgangsspanning in volts gelijk aan de binaire waarde van de 4 ingangen. Dit is de basis voor digitaal-naar-analoog omzetting.

8.5 De niet-ideale op-amp

De ideale op-amp heeft de volgende eigenschappen:

- De ingangsimpedantie, zowel voor de differentiële als de common mode, is oneindig groot.
- De uitgangsimpedantie (open lus) is nul.
- De spanningsversterking (open lus) is oneindig.
- De common mode versterking is nul.
- De uitgangsspanning is nul als beide ingangen gelijk zijn (de ingangs-offsetspanning is nul).
- De uitgang kan 'instantaan' veranderen (de slew rate is oneindig).

Al deze eigenschappen zijn voor een ideale op-amp onafhankelijk van de temperatuur en ongevoelig voor veranderingen in de voedingsspanning.
Een echte op-amp kan niet aan deze eigenschappen voldoen. Afhankelijk van het ontwerp van de op-amp worden de bovenstaande eigenschappen in meer of mindere mate benaderd. De toepassing van de op-amp zal bepalen welk type het meest geschikt is. In de volgende para-

grafen wordt ingegaan op de afwijking van de ideale eigenschappen en de consequenties voor het gedrag van de op-amp.

8.5.1 Niet-ideaal op-amp gedrag

Ingangsstroom (biasstroom)
De ingangen van een op-amp trekken of leveren een kleine stroom (afhankelijk van het type op-amp), de ingangs-biasstroom of kortweg de *biasstroom*, I_b, genoemd. I_b wordt gedefinieerd als het gemiddelde van de ingangsstroom van beide ingangen. De ingangsstromen zijn de basisstromen van de ingangstransistoren en zijn ongeveer gelijk. Voor de 741 is de biasstroom typisch 80 nA. Als gevolg van de biasstroom ontstaat er een spanning over het weerstandsnetwerk dat aan de ingangen is gekoppeld. In hoeverre dit de keuze van weerstanden beperkt hangt af van de keuze van DC-versterking en hoeveel de uitgangsspanning mag afwijken van het ideale gedrag.

Ingangs-verschilstroom (Input-offsetstroom)
De ingangs-verschilstroom, de *input-offsetstroom*, I_{os}, genoemd, is het verschil tussen de ingangsstromen van de op-amp ingangen. In tegenstelling tot de biasstroom is dit geen karakteristieke eigenschap van de ingangstransistoren maar is het verschil een gevolg van variaties in het fabricageproces.
De input-offsetstroom is typisch een factor 10 kleiner dan de biasstroom. Voor een 741 is I_{os} typisch 10 nA.

Ingangsimpedantie
De ingangsimpedantie, R_{in}, heeft betrekking op de differentiële ingangsweerstand (d.w.z. de ingangsweerstand van een ingang met de andere ingang aan aarde). Deze is in het algemeen veel kleiner dan de ingangsimpedantie voor common mode spanningen.
Voor de 741 is de ingangsimpedantie typisch 2 MΩ. Een op-amp met FET-ingangen heeft typisch $R_{in} \approx 10^{12}\ \Omega$. Als gevolg van de negatieve terugkoppeling worden de ingangen op (bijna) dezelfde spanning gehouden, waardoor het grootste deel van de ingangsspanning onderdrukt wordt en de effectieve ingangsimpedantie van de op-amp een zeer grote waarde krijgt. In het algemeen is R_{in} minder belangrijk bij een ontwerp dan de ingangs-biasstroom.

Common mode ingangsbereik
De ingangen van een op-amp moeten binnen een bepaald spanningsbereik blijven om er zeker van te zijn dat de op-amp goed werkt. Voor een 741 met voedingsspanning van ±15 volt is het common mode spanningsbereik ±12 volt.

Differentiële ingangsbereik
Sommige op-amps staan alleen een kleine spanning tussen de ingangen toe. De meeste op-amps laten echter differentiële spanningen toe zo groot als de voedingsspanning. Voor differentiële ingangsspanningen groter dan de voedingsspanning kan de op-amp beschadigd raken.

Uitgangsimpedantie
Met de uitgangsimpedantie, R_o, wordt de intrinsieke uitgangsimpedantie van de op-amp, *zonder terugkoppeling*, bedoeld. R_o van de 741 is typisch 75Ω. Terugkoppeling verkleint de uitgangsimpedantie tot een fractie van een ohm voor een spanningsbron (of vergroot het, voor een stroombron).

Maximale uitgangsspanning en de invloed van de belastingsweerstand

Wat belangrijker is dan de uitgangsimpedantie van de op-amp is de maximale uitgangsstroom van de op-amp, met een typisch waarde van 20 mA. Het effect van een begrensde uitgangsstroom wordt vaak gegeven als een grafiek van de maximale uitgangsspanning als functie van de belastingsweerstand. Soms wordt ook alleen de maximale uitgangsspanning voor een aantal waarden van de belasting gegeven.
De 741 kan zijn uitgang tot ongeveer 2V onder de voedingsspanning brengen voor belastingen groter dan 2kΩ. Kleinere belastingsweerstanden zullen de maximale uitgangsspanning beperken doordat de uitgangsstroom begrensd is.

Spanningsversterking en faseverschuiving

De open-lus spanningsversterking A_{vo} voor DC-spanningen is typisch 10^5 - 10^6 (vaak gespecificeerd in dB). Bij toenemende frequentie neemt de open-lus versterking af tot 1 bij een frequentie (f_T) tussen 1 MHz en 10 MHz (afhankelijk van het type op-amp). Deze informatie wordt vaak gegeven in de vorm van een grafiek van de open-lus spanningsversterking als functie van de frequentie. Voor *intern gecompenseerde* op-amps vertoont de grafiek een afname van de open-lus versterking van 6 dB/octaaf boven een vrij lage frequentie. Voor de 741 begint de afname bij ≈10 Hz.

Ingangs-offsetspanning (Input offset voltage)

De inverterende en niet-inverterende ingangen van op-amps zijn niet perfect gebalanceerd als gevolg van variatie in het fabricage proces. Als de twee ingangen verbonden worden zou een ideale op-amp nul volt aan de uitgang leveren. In de praktijk zal de uitgangsspanning niet nul zijn. De ingangsspanning die nodig is om de uitgang op nul volt te brengen wordt de ingangs-offsetspanning, U_{os}, genoemd. Voor de 741 is de ingangs-offsetspanning typisch 1 mV. Gewoonlijk is er een voorziening getroffen waarmee de uitgangs op nul afgesteld kan worden. Voor de 741 wordt een 10 kΩ potentiometer met pootjes 1 en 5 verbonden, waarbij de loper met de negatieve voedingsspanning verbonden wordt.
Belangrijker voor precisie toepassingen is de temperatuur- en tijdsverloop van de ingangs-offsetspanning, aangezien iedere initiële offset weggeregeld kan worden.

Slew rate

De interne opbouw van de op-amp bepaalt hoe snel de uitgang zich kan aanpassen aan een balansverstoring aan de ingang. Deze snelheidsbeperking wordt aangeduid met de term *slew rate*. Voor de 741 is de slew rate 0.5 V/µs, voor een *snelle* op-amp 100 V/µs, terwijl de LH0063C wel 6000 V/µs haalt. De slew rate beperkt de amplitude van de uitgangsspanning bij hoge frequenties. Een sinus met amplitude A en frequentie f heeft een minimale slew rate van $2\pi fA$ volt/seconde nodig om niet vervormd te raken.

Temperatuurafhankelijkheid

Alle parameters van de op-amp hebben een bepaalde temperatuurafhankelijkheid. Normaal gesproken heeft dit weinig invloed op de eigenschappen, en dus het ontwerp, van de schakeling aangezien kleine variaties in bijvoorbeeld de open-lus versterking bijna volledig gecompenseerd worden door de terugkoppeling. Verder zijn de variaties als functie van temperatuur kleiner dan de verschillen tussen de op-amps onderling.
De uitzonderingen zijn de ingangs-offset spanning en de ingangs-offset stroom. Deze zijn wel van belang voor het ontwerp van een schakeling. Met name als de ingangs-offset spanning niet naar nul afgeregeld wordt.

En nog meer...

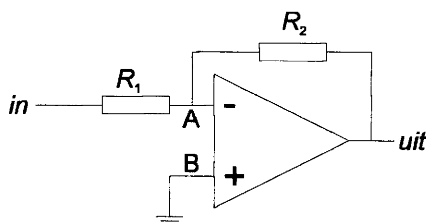
Voor de volledigheid moet hier ook nog gemeld worden dat op-amps ook beperkt worden door hun common mode rejection ratio (CMRR), de power supply rejection ratio (PSRR), de ingangs-ruisspanning en -stroom (e_n en i_n) en de uitgangsvervorming. Deze zijn over het algemeen alleen van belang in precisieschakelingen en versterkers met lage ruis.

8.5.2 Ontwerpen met een niet-ideale op-amp

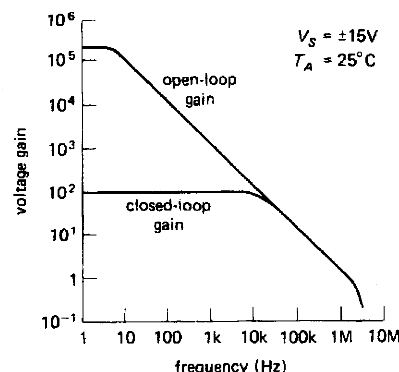
De niet-ideale eigenschappen van de op-amp beïnvloeden het gedrag van op-amp schakelingen. Aan de hand van de inverterende versterker (zie figuur 8.10) wordt gekeken hoe het gedrag van de schakeling beïnvloed wordt en hoe het ontwerp aangepast kan worden om in sommige gevallen het effect te verminderen. De technieken die in dit voorbeeld getoond worden kunnen ook gebruikt worden bij het ontwerp van andere op-amp schakelingen.
Bij het ontwerpen van een schakeling maken we gebruik van de gegevens uit de datasheets van de componenten. Omdat de componenten onderling in eigenschappen variëren worden de eigenschappen in de datasheets aangegeven met de zogenaamde *typische* waarden. Soms worden ook minimale en maximale waarden aangegeven. Het is zaak de schakeling zo te ontwerpen dat het functioneren van de schakeling niet kritisch van de eigenschappen afhangt. In het geval het toch kritisch is, bijvoorbeeld voor de ingangs-offsetspanning of biasstroom, dan moet het ontwerp zo aangepast worden dat deze zelfs met de meest extreme waarde goed functioneert (zgn. *worst case design*).

Open-lus versterking

Door de eindige open-lus versterking zal de spanningsversterking van de versterker met terugkoppeling afnemen vanaf de frequentie waar de open-lus versterking ongeveer gelijk wordt aan R_2/R_1 (zie figuur 8.11). Voor gewone op-amps, zoals de 741, houdt dit in dat de bandbreedte van de versterker vrij klein is. De open-lus versterking is al ingezakt tot 1000 bij 1 kHz en f_T is 1 MHz. Merk op dat de gesloten-lus versterking altijd kleiner is dan de open-lus versterking. Dit betekent dat een 1000x versterker die met een 741 gemaakt wordt een afname in versterking laat zien voor frequenties boven de 1 kHz.



Figuur 8.10 - Inverterende versterker schakeling voor ideale op-amp



Figuur 8.11 - Open-lus versterking als functie van de frequentie van een 741 op-amp

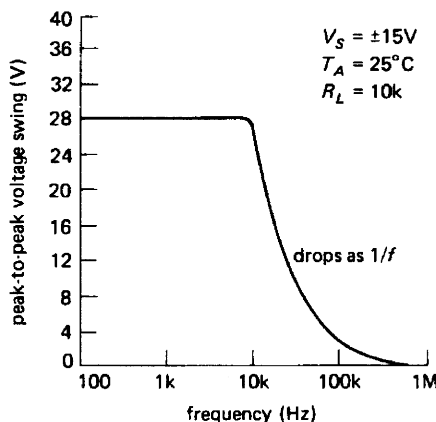
Slew rate

Door de begrensde slew rate zakt de maximale amplitude van een sinusvormige spanning aan de uitgang als de frequentie boven een bepaalde waarde komt. Figuur 8.12 toont de karakteristiek voor een 741 met een slew rate van 0.5 V/µs. Voor een slew rate S wordt de uitgangsamplitude beperkt tot $A_{piek\text{-}piek} \leq S/\pi f$ voor een sinusvormige spanning met frequentie f. Dit

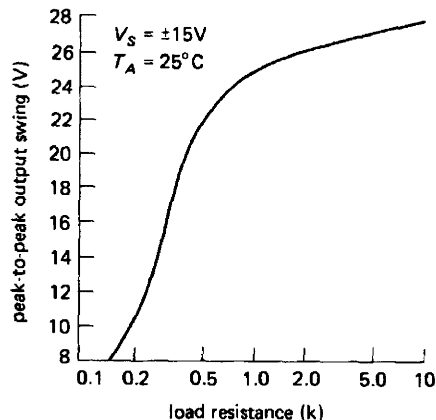
verklaart het $1/f$ gedrag bij hoge frequenties. Het vlakke deel van de curve wordt veroorzaakt door het feit dat de uitgangsspanning ook door de voedingsspanning begrensd wordt.

Uitgangsstroom

Door de begrensde uitgangsstroom wordt de maximale uitgangsspanning beperkt bij kleine belastingsweerstanden. Figuur 8.13 toont voor een 741 de maximale uitgangsspanning als functie van de belastingsweerstand. Voor een precisie op-amp is het een goed idee om grote uitgangsstromen te vermijden zodat er geen temperatuurgradiënten op de chip ontstaan door de vermogensontwikkeling in de uitgangstrap.



Figuur 8.12 - Beperking van de uitgangsspanning t.g.v. de eindige slew rate.



Figuur 8.13 - Beperking van de uitgangsspanningsamplitude t.g.v. de eindige uitgangsstroom

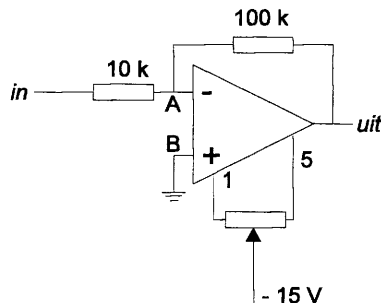
Ingangs-offsetspanning

Door de ingangs-offsetspanning U_{os} zal een ingangsspanning van nul volt een uitgangsspanning van $G_{DC}U_{os}$ geven, waarbij G_{DC} de versterking van de teruggekoppelde versterker is. Voor een inverterende versterker met een versterking van 100 gemaakt met een 741, kan de uitgangsspanning maar liefst ±0.6 volt bedragen als de ingangen beide geaard zijn (U_{os} is maximaal 6 mV). Voor dit probleem zijn drie oplossingen. (1) Als er geen DC-versterking nodig is, bijvoorbeeld in een versterker die alleen bij frequenties boven de 10 Hz hoeft te versterken, kan de versterkingsfactor bij lage frequenties verkleind worden; dat kan soms door aan de ingang, in serie met de weerstand, een condensator op te nemen, soms beter door een modificatie in de terugkoppeling. (2) Trimmen van de offset spanning naar nul m.b.v. het circuit in figuur 8.14. (3) Gebruik van een op-amp met een kleinere U_{os}.

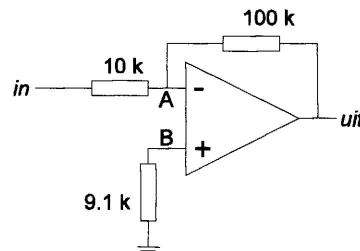
Ingangs-biasstroom

Door de eindige ingangs-biasstroom zal een ingangsspanning van nul volt nog steeds een uitgangsspanning geven, zelfs als de ingangs-offsetspanning is weggeregeld. De inverterende ingang *ziet* een impedantie van $R_1||R_2$ waardoor de biasstroom naar aarde kan lopen. Dit veroorzaakt een spanning $U_{in} = I_b(R_1||R_2)$ die nog wordt versterkt door de versterker. Voor een 741 als inverterende versterker geschakeld met $R_1 = 10$ kΩ en $R_2 = 100$ kΩ is de effectieve weerstand naar aarde 9.1 kΩ. De biasstroom kan 200 nA zijn, wat leidt tot een uitgangsspanning van 10·200 nA·9.1 kΩ = 0.02 V. Om dit effect van de biasstroom te minimaliseren is het een goed idee om er voor te zorgen dat beide ingangen dezelfde weerstand naar aarde zien. Voor de schakeling in figuur 8.15 is de parallelweerstand van de terugkoppeling 9.1 kΩ.

Doordat de biasstromen voor beide ingangen ongeveer even groot zijn wordt de verschilspanning tussen beide ingangen een stuk kleiner.
Het verdient ook aanbeveling om de weerstanden in het terugkoppelnetwerk zo te kiezen dat de biasstroom geen grote spanning kan veroorzaken. De weerstanden aan de ingang van de op-amp hebben dan typisch waarden van kleiner dan 100 kΩ.



Figuur 8.14 - Offset null circuit voor de 741



Figuur 8.15 - Compensatie van de ingangs-biasstroom d.m.v. extra weerstand van de + ingang naar aarde

Ingangs-offsetstroom

Vanwege de ingangs-offsetstroom (d.w.z. het verschil tussen de biasstroom van de inverterende en niet-inverterende ingangen) zal zelfs een schakeling met gebalanceerde weerstandsnetwerken aan de op-amp ingang een eindige uitgangsspanning leveren. Omdat dit effect gewoonlijk een stuk kleiner is dan het effect van een ongebalanceerde biasstroom is het balanceren wel de moeite waard. Als de resterende uitgangsspanning nog steeds te groot is kan deze alleen verder verkleind worden door een op-amp met kleinere ingangsstroom te kiezen.

Beperkingen en afwegingen

De beperkingen in op-amp eigenschappen hebben invloed op de componentwaarden die in een schakeling gebruikt kunnen worden. De weerstanden in het terugkoppelnetwerk moeten zo groot zijn dat ze de uitgang niet te sterk belasten, maar ze mogen ook niet zo groot zijn dat de ingangs-biasstroom een ontoelaatbare offset aan de uitgang geeft. Bij dit laatste zijn ook de andere weerstanden die verbonden zijn met de ingangen van de op-amp van belang. Grote impedanties in het terugkoppelnetwerk verhogen ook de gevoeligheid voor capacitieve oppik van storende signalen en versterken het effect van parasitaire capaciteiten. Deze afwegingen leiden tot weerstandswaarden van 2 kΩ tot en met 1 MΩ in het terugkoppelnetwerk voor de 741. Direct op de ingang aangesloten weerstanden mogen nog wel kleiner zijn omdat ze de uitgang van de op-amp niet belasten. Vergelijkbare afwegingen spelen bij bijna alle andere elektronische ontwerpen.

8.5.3 Literatuur

Algemene Elektronica

- *The Art of Electronics*, P. Horowitz en W. Hill, Cambridge University Press
- *A Practical Introduction to Electronic Circuits*, M.H. Jones, Cambridge University Press
- *Electronic Design, Circuits and Systems*, C.J. Savant jr., M.S. Roden en G.L. Carpenter, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc

Netwerk Analyse (zowel met als zonder op-amps)

- *Elementary Linear Circuit Analysis*, L. S. Bobrow, Holt Rinehart and Winston Inc.

Praktische schakelingen

- *Operationele Versterkers*, M. Zirpel, Kluwer

9 Warmtetransport

9.1 Inleiding

Warmtetransport kan op drie manieren plaatsvinden.

1. Warmtestraling
Ieder lichaam zendt elektromagnetische straling uit. In welke mate en bij welke golflengten hangt af van de temperatuur van dat lichaam en van zijn emissiecoëfficiënt. Deze straling vertegenwoordigt een hoeveelheid energie die door een ander lichaam waarmee stralingscontact is weer kan worden geabsorbeerd. Er is geen medium nodig om deze straling te geleiden.

2. Warmtegeleiding
Onder warmtegeleiding verstaat men energieoverdracht ten gevolge van een temperatuurverval zonder dat er materietransport optreedt. Geleiding is de voornaamste vorm van warmtetransport in vaste stoffen maar is ook van belang voor het warmtetransport in vloeistoffen.

3. Warmtestroming of convectie
Onder convectie verstaat men het warmtetransport dat een gevolg is van de verplaatsing van de materie die de drager van de warmte is. Deze vorm van warmtetransport treedt vooral op bij gassen maar ook wel bij vloeistoffen.

Het totale warmtetransport zal vaak het resultaat zijn van een combinatie van de bovenstaande drie mogelijke effecten.

9.2 Warmteoverdracht

9.2.1 Warmtecapaciteit en soortelijke warmte

Als men een hoeveelheid warmte ΔQ toevoert aan een lichaam dan zal de temperatuur van dit lichaam stijgen. Men definieert de *warmtecapaciteit* C van het lichaam als

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \tag{9.1}$$

waarin ΔT de temperatuurstijging van het lichaam is. Als de temperatuursverschillen niet al te groot zijn dan is C vaak in goede benadering constant.
Bestaat het lichaam slechts uit een stof, bijvoorbeeld ijzer, dan heeft het zin te praten over de warmtecapaciteit per massaeenheid. Deze grootheid is een stofconstante die bekend staat als de *soortelijke warmte*, gedefinieerd als

$$c = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} \tag{9.2}$$

waarin m de massa van de stof is.

Men maakt onderscheid tussen de *soortelijke warmte bij constante druk* (c_p) en de *soortelijke warmte bij constant volume* (c_V), die met name bij gassen nogal van elkaar kunnen verschillen. Bij experimenten in de joulemeter hebben we uitsluitend te maken met de soortelijke warmte bij constante druk (zie ook par. 9.4: inwendige energie en enthalpie).

9.2.2 Warmteoverdrachtscoëfficiënt

Stel we hebben een lichaam met een warmtecapaciteit C en een temperatuur T. De omgeving heeft een temperatuur T_s. (s van surroundings) Het temperatuurverschil $T - T_s$ zal een warmtestroom veroorzaken. Het transport van warmte komt tot stand door de fysische verschijnselen van geleiding, convectie en straling. De warmtestroom naar de omgeving blijkt bij een niet al te groot temperatuurverschil rechtevenredig te zijn met de grootte van het oppervlak en het temperatuurverschil:

$$\Phi = \alpha A(T - T_s) \qquad (9.3)$$

$\Phi = dQ/dt$ is de warmtestroom van het lichaam naar de omgeving (J s^{-1} = Watt).
A is het oppervlak van het lichaam (m^2).
De evenredigheidsconstante α noemt men de *warmteoverdrachtscoëfficiënt* (W m^{-2} K^{-1}).

9.2.3 Afkoelingswet van Newton

Als een lichaam afkoelt zal er via de grenslaag een warmtestroom Φ dat lichaam verlaten. Er geldt dat de *uitgestroomde warmte* ($dQ_{uit} = \Phi dt$) gelijk is aan de *afname van de warmte-inhoud*

$$\Phi dt = -C dT \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\Phi}{C} \qquad (9.4)$$

waarin C de warmtecapaciteit is. Na invullen van uitdrukking 9.3 voor de warmtestroom Φ volgt

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha A}{C}(T - T_s) \qquad (9.5)$$

Dit is de zogenaamde *afkoelingswet van Newton in differentiële vorm.* Als α onafhankelijk van T en T_s wordt verondersteld, kan de vergelijking worden geïntegreerd. Na het invullen van de beginvoorwaarde (op $t = 0$ is $T = T_0$) wordt de geïntegreerde vergelijking

$$T - T_s = (T_0 - T_s)\exp\left(-\frac{\alpha A}{C}t\right) \qquad (9.6)$$

Dit kan ook herschreven worden tot

$$\ln\frac{T - T_s}{T_0 - T_s} = -\frac{\alpha A}{C}t \qquad (9.7)$$

of

$$\ln(T - T_s) = \ln(T_0 - T_s) - \frac{\alpha A}{C} t \qquad (9.8)$$

9.3 De Joulemeter

9.3.1 Bouw

De *joulemeter* (vroeger calorimeter) is een toestel waarin warmtemetingen gedaan kunnen worden. Meestal stelt men een warmtebalans op waarbij men aanneemt dat in de joulemeter een homogene temperatuur bestaat. Bovendien is er vaak een mogelijkheid om nauwkeurig bekende hoeveelheden warmte toe te voeren, bijvoorbeeld door middel van een stookweerstand. Zie fig. 9.1.

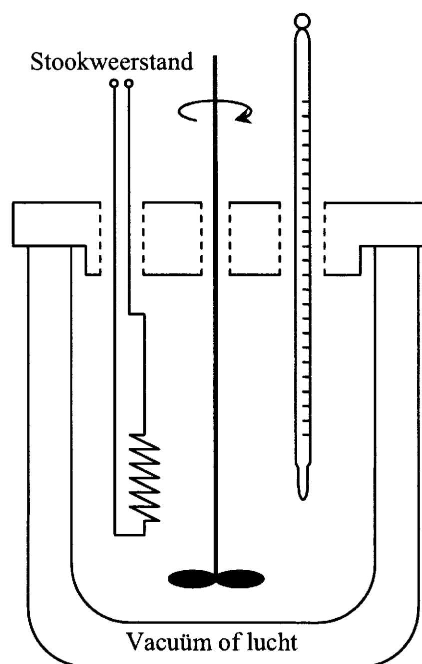


Fig. 9.1. Eenvoudige Joulemeter

Als men een homogene temperatuurverdeling wil hebben treedt altijd een *insteltijd* op. Dan moet voorkomen worden dat intussen warmte wegstroomt. Hiertoe zal de joulemeter ten opzichte van zijn omgeving een warmteoverdracht moeten hebben die nul is. Dit is in de praktijk niet te realiseren maar deze kan wel zo klein mogelijk worden gemaakt:

1. Men kan de joulemeter *dubbelwandig* uitvoeren. Lucht, bepaalde kunststoffen en ook kurk zijn zeer goede warmte-isolatoren zodat het verlies door geleiding en convectie (lucht) beperkt blijft.

2. Men kan het lek ten gevolge van convectie verwaarloosbaar klein maken door de ruimte tussen de wanden te evacueren (thermosfles).

3. De oppervlakken van de joulemeter kan men zo goed mogelijk reflecterend maken, vooral in het infraroodgebied waar de meeste straling wordt uitgezonden. Een dof aluminiumoppervlak is een uitstekende reflector (dus ook een slechte straler).

Om de hoeveelheid warmte te bepalen gebruikt men de temperatuur als meetbare grootheid. Een goede nauwkeurigheid in de meting van de hoeveelheid warmte is slechts bereikbaar bij een voldoende grote temperatuursverandering. Het is daarom noodzakelijk om de *warmtecapaciteit van de joulemeter* voldoende klein te maken.
Een goede temperatuurmeting is alleen mogelijk als voor een *homogene temperatuur* in de joulemeter gezorgd wordt. Daarom wordt in het geval van vloeistoffen een roerder in de joulemeter opgenomen.

9.3.2 Werken met de joulemeter

Bij het uitvoeren van een experiment voert men een hoeveelheid warmte toe aan de joulemeter (bijvoorbeeld d.m.v. een stookelement of door een chemische reactie te laten plaatsvinden). Het duurt dan enige tijd voordat de toevoer of reactie is voltooid en de temperatuur homogeen verdeeld is. De tijd die nodig is voor het toevoeren van de warmte en het vereffenen

van de temperatuur noemt men de *werkperiode*. Om bij een experiment met de joulemeter te bepalen hoeveel warmte er is toegevoerd meet men de temperatuur als functie van de tijd, zowel *tijdens* als *voor* en *na* de werkperiode. Deze periodes noemt men resp. de *voor-* , *werk-* en *naperiode*. Het nut van de voor- en naperiode blijkt in de volgende paragraaf.

Wanneer de inhoud van de joulemeter een andere temperatuur T bezit dan de omgevingstemperatuur T_s, zal T veranderen tijdens de voor- en na periode doordat warmte naar binnen of naar buiten lekt. Dit effect kan voor een goed geïsoleerde joulemeter beschreven worden met de vergelijking

$$T = T_0 - \frac{(T_0 - T_s)\alpha A}{C} t \qquad (9.9)$$

Deze volgt uit vergelijking (9.6), waarbij gebruik is gemaakt van de reeksontwikkeling $e^{-x} = 1 - x$ voor kleine x. Bij een goed geïsoleerde joulemeter is de warmteoverdrachtscoëfficiënt α klein.
T_0 is de temperatuur van de joulemeter op het moment dat met meten begonnen wordt. De grafiek van de temperatuur als functie van de tijd is dan lineair. Indien dit model te beperkt is, kan een betere benadering worden verkregen door meer termen van de reeksontwikkeling te nemen.

Het resultaat van de metingen kan dan bijvoorbeeld de getrokken lijn in figuur 9.1 zijn. De werkperiode loopt van t_1 tot t_2.

In deze tijd (de werkperiode dus) verandert de temperatuur van T_1 naar T_2. Het temperatuurverschil $T_2 - T_1$ wordt veroorzaakt door de warmte die ontwikkeld wordt tijdens het proces en door het warmtelek. Als we uit het temperatuurverschil rechtstreeks de warmte berekenen met $Q = C \cdot (T_2 - T_1)$ dan maken we een systematische fout. We verwaarlozen dan de lekwarmte. Deze lekwarmte is vooralsnog onbekend. We moeten hiervoor corrigeren. Het temperatuurverschil $T_2 - T_1$ is daarom niet de juiste grootheid om de warmtetoevoer tijdens de werkperiode kwantitatief vast te leggen.

9.3.3 Correctie warmtelek

Bij het *werkelijke* proces (verder aangeduid met de index W; zie de getrokken lijn in fig. 9.1) weten we de grootte van het warmtelek niet. Wij stellen ons daarom een denkbeeldig proces voor (verder aangeduid met de index D; de gestippelde lijn in fig. 9.1) waarbij we de grootte van het warmtelek wel kunnen bepalen. Het *denkbeeldige* proces ziet er als volgt uit:

a. Van t_1 tot t^* is de joulemeter in "lekcontact" met de omgeving. De temperatuur verandert in deze periode van T_1 naar T_B. (Er wordt in deze fase van het denkbeeldige proces dus geen warmte toegevoerd.)
b. Op $t = t^*$ wordt de totaal geproduceerde hoeveelheid warmte Q_D *ineens* toegevoerd. De temperatuur stijgt bij dit proces van T_B naar T_E. Daar de warmtetoevoer momentaan geschiedt, is de lekwarmte tijdens dit proces gelijk aan nul.
c. Van t^* tot t_2 is de joulemeter weer in "lekcontact" met de omgeving. De temperatuur verandert nu van T_E naar T_2.

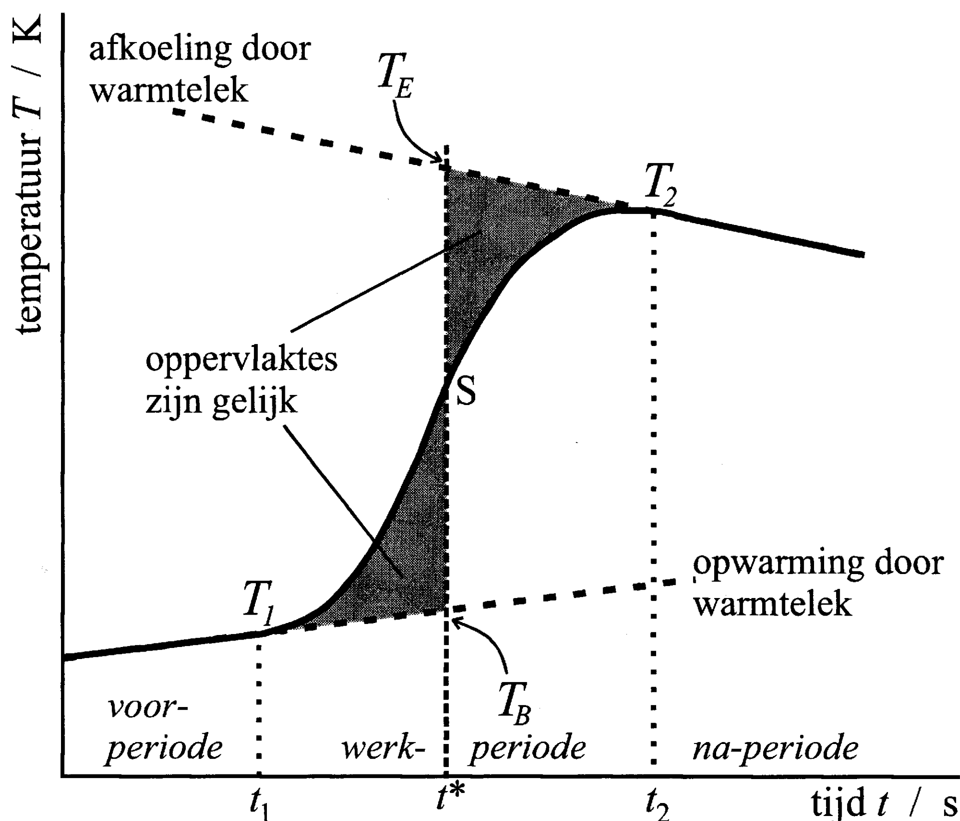
Dit denkbeeldige proces kiezen wij zo dat de hoeveelheid warmte Q_W die bij het werkelijke proces wordt geproduceerd even groot is als de hoeveelheid warmte Q_D die bij het denkbeeldige proces wordt geproduceerd. Dus:

$$Q_W = Q_D \tag{9.10}$$

We kunnen de bij het denkbeeldig proces geproduceerde hoeveelheid warmte Q_D berekenen met:

$$Q_D = C \cdot (T_E - T_B) \tag{9.11}$$

We weten dan ook de bij het werkelijke proces geproduceerde hoeveelheid warmte Q_W. Het temperatuurverloop tijdens de fases a. en c. wordt niet gemeten maar verkregen door extrapolatie van de voor en naperiode (zie figuur 9.1). Daar volgens vergelijking 9.9 de temperatuur T lineair verloopt met de tijd t is het mogelijk zinvol en betrouwbaar te extrapoleren. Belangrijk is dus de keuze van het tijdstip t^*. Deze keuze bepaalt de hoeveelheid lekwarmte uit de joulemeter bij het denkbeeldige proces tussen t_1 en t_2.



Figuur 9.1 - Het verloop van de temperatuur T in de joulemeter als functie van de tijd. De getrokken lijn stelt het werkelijke proces voor en de stippellijn (T_1, T_B, T_E, T_2) het denkbeeldige proces. De temperatuur van de omgeving zal ergens tussen T_B en T_E liggen.

Als men het tijdstip t^* zo kiest dat de beide donker gekleurde oppervlakken in fig. 9.1 even groot zijn, dan kan worden aangetoond dat $Q_W = Q_D$. Dit bewijs leveren we in de volgende paragraaf.

9.3.4 Theoretische verantwoording correctie warmtelek

In deze paragraaf volgt voor de volledigheid het bewijs van $Q_W = Q_D$. Lezing van het onderstaande is niet noodzakelijk voor het voorbereiden en/of begrijpen van een practicumopdracht.

Stel dat de werkperiode duurt van t_1 tot t_2 en in dit tijdsinterval de temperatuur van T_1 naar T_2 gaat. Zoals in de paragraaf over het werken met de joulemeter al opgemerkt is wordt het temperatuurverschil $T_2 - T_1$ veroorzaakt door de tijdens het proces ontwikkelde warmte Q_W en door de lekwarmte $Q_{W,lek}$. In formule:

$$Q_{W,totaal} = Q_W + Q_{W,lek} \tag{9.12}$$

Ook bij het denkbeeldige proces wordt dit temperatuurverschil $T_2 - T_1$ veroorzaakt door tijdens het proces ontwikkelde warmte Q_D en de lekwarmte $Q_{D,lek}$. Ook nu weer in formule:

$$Q_{D,totaal} = Q_D + Q_{D,lek} \tag{9.13}$$

Daar het denkbeeldige en het werkelijke proces beide tussen dezelfde begin en eindtemperatuur verlopen geldt

$$Q_{W,totaal} = Q_{D,totaal} \quad \text{dus:} \quad Q_W + Q_{W,lek} = Q_D + Q_{D,lek} \tag{9.14}$$

Als we de lijn $t = t^*$ nu zo kunnen kiezen dat

$$Q_{W,lek} = Q_{D,lek}$$

(9.15)

dan volgt met vergelijking (9.14) dat

$$Q_W = Q_D \tag{9.16}$$

In de volgende subparagraaf laten we zien dat dit het geval is als de in fig. 9.1 aangegeven oppervlaktes gelijk zijn.

Verantwoording keuze t^*

Stel dat de temperatuur van het werkelijke proces als functie van de tijd tijdens de werkperiode voor te stellen is met $T_W(t)$ en van het denkbeeldige proces met $T_D(t)$. Stel: het tijdstip t^* is zodanig gekozen dat $Q_{W,lek} = Q_{D,lek}$ dus:

$$Q_{W,lek} - Q_{D,lek} = 0 \tag{9.17}$$

Volgens vergelijking 9.5 geldt:

$$Q = \int C\,dT = -\int \Phi dt \tag{9.18}$$

Invullen van vergelijking (9.3) levert:

$$Q = -\int \alpha A(T - T_s)dt \qquad (9.19)$$

Invullen van deze relatie in vergelijking (9.17) levert, mits α onafhankelijk is van T, het volgende op:

$$-\alpha A\int_{t_1}^{t_2}(T_w(t) - T_s)dt + \alpha A\int_{t_1}^{t_w}(T_D(t) - T_s)dt = 0. \qquad (9.20)$$

Of korter:

$$\int_{t_1}^{t_2}(T_w(t) - T_D(t))dt = 0 \qquad (9.21)$$

Dit betekent dat de lijn $t = t^*$ zo gekozen moet worden dat de algebraïsche som van de oppervlakken tussen $T_W(t)$ en $T_D(t)$ gelijk nul moet zijn dus dat de beide in fig. 9.1 donker gekleurde oppervlakken even groot moeten zijn.

9.4 Inwendige energie en enthalpie

Als je een hoeveelheid warmte (Q) toevoert aan een stof, dan zal deze warmte:

1. terecht komen in de moleculen van de stof, in de vorm van kinetische energie en potentiële energie. Deze energie noemen we de inwendige energie (U).
2. gebruikt worden voor het verrichten van arbeid.

Als je bijvoorbeeld een hoeveelheid gas in een zuiger verwarmt, zal dit gas een hogere temperatuur krijgen (de kinetische energie van de moleculen neemt toe), uit gaan zetten (de potentiele energie van de moleculen neemt toe) en de zuiger omhoog drukken (het gas verricht dan dus arbeid).
Houd je tijdens de warmtetoevoer het *volume* van de stof *constant*, dan verricht de stof geen arbeid en komt alle warmte dus ten goede aan de inwendige energie van de stof. Als gelijkheid kun je dan schrijven:

toegevoerde warmte$_{(constant\ volume)}$ = *toename inwendige energie* (9.22)

Helaas komt het in de natuur maar weinig voor dat tijdens een proces het volume constant blijft.
Vele gangbare processen (smelten, verdampen, chemische reacties) vinden juist plaats bij *constante druk.* Bij constante druk kunnen stoffen inkrimpen of uitzetten zodat er vrijwel altijd arbeid verricht wordt. We kunnen dan dus niet zeggen dat de toegevoerde warmte omgezet wordt in *inwendige energie* van de stof, maar moeten tevreden zijn met de gelijkheid:

toegevoerde warmte$_{(constante\ druk)}$ = *toename inwendige energie* + *verrichte arbeid*

Het zou mooier zijn als je, net als bij de inwendige energie bij constant volume, zou kunnen zeggen bij het toevoeren van warmte bij constante druk:

toegevoerde warmte$_{(constante\ druk)}$ = *toename van iets wat bij de stof hoort*

Dit blijkt te kunnen, en dat 'iets wat bij de stof hoort' noemen we de *enthalpie* (H) van de stof.

Samenvatting:
Bij processen die zich bij constant volume afspelen wordt opgenomen warmte omgezet in inwendige energie (U). Bij processen die zich bij constante druk afspelen wordt opgenomen warmte niet omgezet in inwendige energie, maar in enthalpie (H).

Het is bij Joulemetrie even opletten wat het teken van de enthalpieverandering is.

Een stijging van de temperatuur van de Joulemeter betekent een afname van de enthalpie van de stof.

Als namelijk de temperatuur in de Joulemeter stijgt, dan heeft de stof warmte afgestaan aan de joulemeter en is zijn enthalpie dus afgenomen. De enthalpieverandering (ΔH) is dan dus negatief.

Men kan het bovenstaande verhaal ook meer wiskundig formuleren. Als men een hoeveelheid warmte ΔQ toevoert aan een stof, dan neemt de inwendige energie toe met ΔU en wordt er een hoeveelheid arbeid $p{\cdot}\Delta V$ verricht, waarbij p de druk en ΔV de volumetoename van de stof zijn:

$$\Delta Q = \Delta U + W_{uitwendig} = \Delta U + p \cdot \Delta V \qquad (9.23)$$

Als de druk constant is dan kan men $p{\cdot}\Delta V$ ook schrijven als $\Delta(p{\cdot}V)$. Hiermee wordt de bovenstaande vergelijking

$$(\Delta Q)_{\text{p constant}} = \Delta U + \Delta(p \cdot V) = \Delta(U + p \cdot V) \qquad (9.24)$$

Definieert men nu de enthalpie (H) als

$$H = U + pV$$

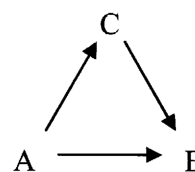
dan is

$$(\Delta Q)_{\text{p constant}} = \Delta H$$

9.5 De wet van Hess

De enthalpie (H) is een toestandsfunctie, d.w.z. alleen afhankelijk van de toestand van de beschouwde stoffen en niet van de weg waarlangs die toestand is bereikt. Hiervan kunnen we gebruik maken om enthalpieveranderingen te bepalen van processen die in de praktijk niet of moeilijk te realiseren of te meten zijn.

Beschouw een willekeurig proces A → B waarvan we de enthalpie-verandering $\Delta H_{A\to B}$ willen bepalen. Omdat de enthalpie een toestandsfunctie is, kunnen we het proces vervangen door een ander proces dat via C loopt (zie figuur rechts) en schrijven:



$$\Delta H_{A\to B} = \Delta H_{A\to C} + \Delta H_{C\to B}$$

Dit is de wet van Hess.

Uit

$$\Delta H_{C\to B} + \Delta H_{B\to C} = \Delta H_{C\to C} = 0$$

volgt

$$\Delta H_{C\to B} = -\,\Delta H_{B\to C}$$

zodat we de wet van Hess ook kunnen schrijven als

$$\Delta H_{A\to B} = \Delta H_{A\to C} - \Delta H_{B\to C}$$

10 Thermo-Elektrische Effecten en Temperatuurmeting

10.1 Thermo-elektrische effecten

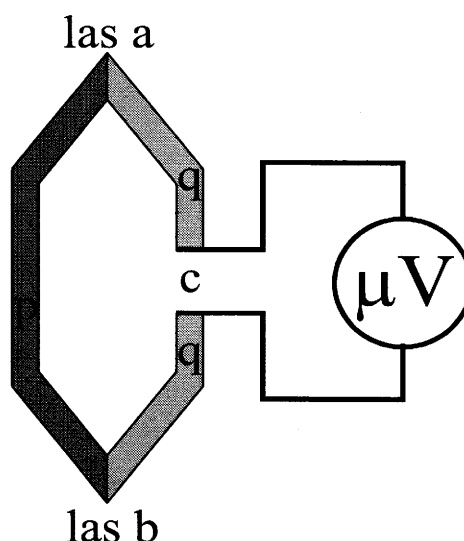
Als men twee verschillende materialen op twee plaatsen (lassen) met elkaar verbindt en deze op een verschillende temperatuur brengt, dan kan er een elektrische spanning ontstaan. Omgekeerd kan men, door een stroom door het circuit te laten lopen, een temperatuursverschil opwekken. Dit soort effecten staat bekend als thermo-elektrische effecten en zullen in deze bijlage aan de orde komen.

10.1.1 Het thermokoppel

Een thermokoppel bestaat uit twee draden die beide van verschillende maar wel geleidende materialen p en q zijn gemaakt. Ze worden verbonden tot een circuit (zie figuur 10.1) door ze bij a en b aan elkaar te lassen. Bij het punt c is het circuit onderbroken. Aan de hier aanwezige klemmen is een microvoltmeter verbonden.

Worden a en b op verschillende temperaturen T_a en T_b gebracht, dan wijst de voltmeter een spanning U_{th} aan (*thermo-elektrisch* effect). Deze spanning heet de bronspanning van het thermokoppel of kortweg de thermospanning. De thermospanning blijkt bij benadering (als het temperatuurverschil tussen a en b niet te groot is) evenredig te zijn met $T_a - T_b \equiv \Delta T$:

$$U_{th} = \alpha \cdot \Delta T \qquad (10.1)$$



Figuur 10.1 - Thermokoppel

De evenredigheidsconstante α, de zogenaamde *seebeckcoëfficiënt,* hangt alleen af van de gebruikte materiaalcombinatie.

De door de microvoltmeter gemeten spanning is strikt genomen alleen dan gelijk aan de thermospanning als er geen stroom door de meter loopt. De afwijking tussen de klemspanning en de thermospanning (de bronspanning van het thermokoppel) is echter bij gebruik van een hoogohmige meter gering. Loopt er een stroom I dan wordt de spanning aan de klemmen lager. De daling is evenredig met I; de evenredigheidsconstante R is de inwendige weerstand van het thermokoppel.

10.1.2 Het peltiereffect

Als men het thermokoppel op een spanningsbron aansluit, zodat er een stroom door het circuit gaat lopen, dan blijkt dat er bij de ene las warmte wordt opgenomen en bij de andere las warmte vrijkomt. Dit warmte-effect heet het *peltiereffect.*

Als men het spanningsverschil U in dezelfde richting als de thermospanning U_{th} aanlegt wordt er aan de las met hogere temperatuur warmte opgenomen en aan de las met lagere temperatuur warmte afgestaan. Nu stroomt warmte in het algemeen van hogere naar lagere temperatuur; het bijzondere is hier alleen dat de warmte wordt "meegevoerd" door de elektrische stroom.

De situatie wordt anders als we de stroomrichting omdraaien door tussen de klemmen een uitwendige spanning U aan te leggen die tegengesteld is aan U_{th}. Dan blijkt aan de las met lagere temperatuur energie *opgenomen* te worden terwijl door de las met hogere temperatuur energie wordt afgestaan. Men spreekt vaak van "koude las" en "warme las". De koude las kan dan een voorwerp of een ruimte koelen; aan de warme kant kan de warmte door koelwater worden afgevoerd. Het thermo-element werkt dan als peltier-koelelement.

Voor koeling is een energiebron nodig. Hier fungeert de uitwendige elektrische spanningsbron als zodanig. De geleverde stroom kan worden afgeleid uit:

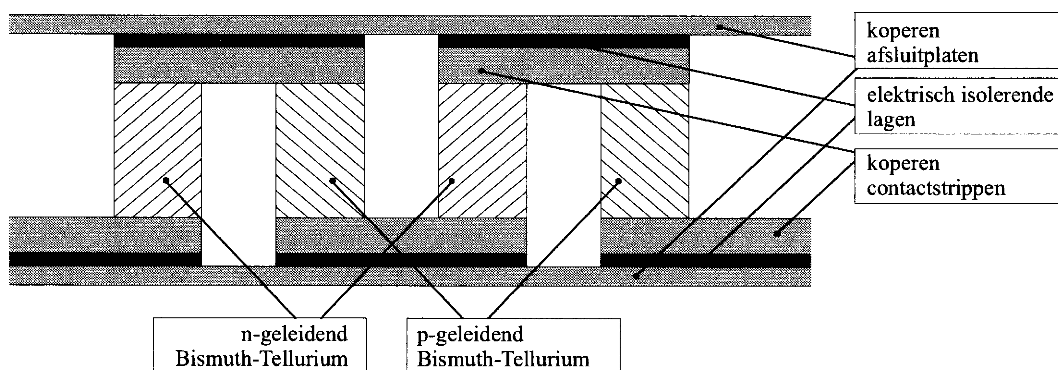
$$U - U_{th} = I \cdot R \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U - \alpha \cdot \Delta T}{R} \tag{10.2}$$

waarin R de totale weerstand van het circuit is. Het door de bron geleverde vermogen is gelijk aan $P_e = U \cdot I$. Dit vermogen is dus afhankelijk van het temperatuur-verschil ΔT tussen de warme en de koude las.

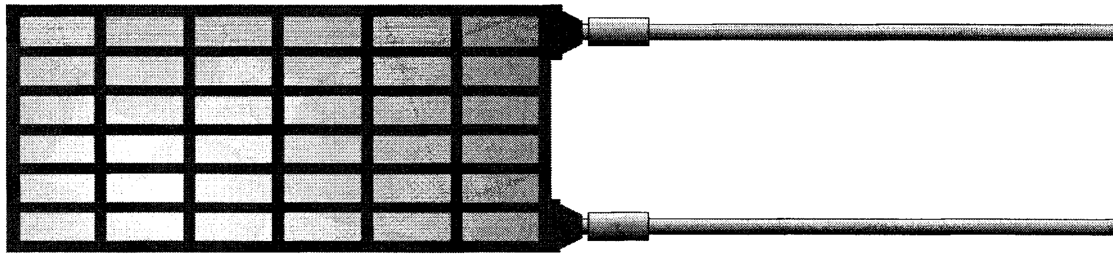
10.2 De Peltier-batterij

De werking van een *Peltier-batterij* is gebaseerd op het peltiereffect. De Peltier-batterij bestaat uit een serieschakeling van een aantal *peltierelementen*. Ieder peltierelement bestaat uit een thermokoppel-eenheid zoals in figuur 1 getekend is.

In de praktijk veel gebruikte Peltier-batterijen bestaan uit een serieschakeling van 36 elementen van n-geleidend en p-geleidend bismuth-tellurium. De afzonderlijke peltierelementen van een Peltier-batterij bestaan uit korte staven van de elementen zodat de ohmse weerstand gering is. De staven zijn niet direct aan elkaar verbonden maar door middel van koperen contactstrippen met goede eigenschappen wat betreft elektrische en thermische geleiding. Dankzij een geschikte opstelling van n- en p-geleidende staven bevinden in beide gevallen de warme en koude lassen zich aan tegenoverliggende zijden. Twee koperen afsluitplaten, die volledig gescheiden zijn van de peltierelementen door een elektrisch isolerende tussenlaag die de warmte goed geleidt, vormen de eigenlijke oppervlakken voor warmte-uitwisseling. In figuur 10.2 zijn een tweetal in serie geschakelde peltierelementen uit een dergelijke batterij schematisch weergegeven. In figuur 10.3 is een voorbeeld van de totale Peltier-batterij te zien.



Figuur 10.2 - Schematische weergave Peltier-batterij



Figuur 10.3 - Voorbeeld van een Peltier-batterij

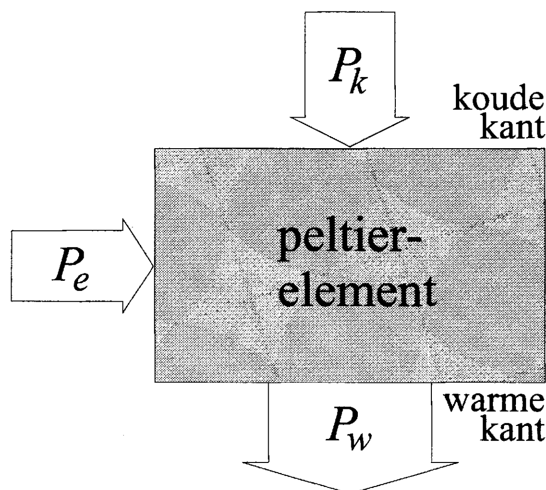
Toepassing van Peltier-batterijen

Peltier-batterijen zijn zeer compact te bouwen en daardoor zeer geschikt om kleine volumina te koelen of te verwarmen. Ze worden bijvoorbeeld gebruikt voor de koeling van de fotogevoelige detector in videocamera's (dan ontstaat minder thermische ruis in de electronica). Een andere toepassing is het op de juiste temperatuur houden van halfgeleider lasers of van biologische kweekmedia. Ze worden ook veel gebruikt in de ruimtevaart.

10.2.1 De theoretische grondslag van thermo-elektrische afkoeling

Het gedrag van de Peltier-batterij is goed te beschrijven door een vermogensbalans op te stellen. In figuur 10.4 is de werking van een peltierelement als koelelement schematisch weergegeven.

Als er een stroom I door het element loopt zal een hoeveelheid elektrisch vermogen P_e aan het peltierelement meegegeven worden. Aan de koude kant van het peltierelement wordt dan een vermogen P_k (in de vorm van aan de omgeving onttrokken warmte) opgenomen, terwijl er aan de warme kant een vermogen P_w wordt afgestaan.



Figuur 10.4 - De werking van een peltierelement

De per seconde bij een las afgegeven of geabsorbeerde warmte (P) hangt af van de stroomsterkte I, de temperatuur T (in K) en de gebruikte materiaalcombinatie:

$$P = \alpha \cdot I \cdot T \tag{10.3}$$

Hierin is α de seebeckcoëfficiënt die we ook bij het thermokoppel zijn tegengekomen (zie paragraaf 10.1). De seebeckcoëfficiënt hangt zeer weinig van de temperatuur af, zodat in het volgende zal worden aangenomen dat α als constant te beschouwen is.

In elk gesloten stroomcircuit bestaande uit twee verschillende materialen zijn twee lassen (contactplaatsen) tussen de materialen die in tegengestelde richting door de stroom worden doorlopen. Eén las koelt dan ook af tot temperatuur T_k terwijl de andere wordt opgewarmd tot temperatuur T_w, zodat we voor de aan de lassen opgenomen c.q. afgestane hoeveelheden warmte per tijdseenheid (P_k en P_w) kunnen schrijven als:

$$P_k = \alpha \cdot I \cdot T_k \qquad \text{en:} \qquad P_w = \alpha \cdot I \cdot T_w \tag{10.4}$$

Volgens de vermogensbalans van het schema in figuur 10.4 moet dan voor het toegevoegde elektrische vermogen P_e gelden dat:

$$P_e = P_w - P_k \qquad \Rightarrow \qquad P_e = \alpha \cdot I \cdot (T_w - T_k) \tag{10.5}$$

wat overeenkomt met het ontwikkelde vermogen ten gevolge van de thermospanning en thermostroom behorend bij het temperatuurverschil $\Delta T = T_w - T_k$. [2]

De nuttige koeling, die beschreven wordt door het model van vergelijking 10.4 en 10.5 wordt verminderd door twee onvermijdelijke effekten, waarover hieronder enkele aannamen zullen worden gedaan.

1. *Warmteontwikkeling ten gevolge van ohmse weerstand van het peltierelement*
   Het peltierelement zal een weerstand R_{el} hebben. Per seconde wordt hierdoor een hoeveelheid warmte in het peltierelement ontwikkeld die gelijk is aan:

   $$P_R = R_{el} \cdot I^2 \tag{10.6}$$

   We nemen aan dat de helft van deze hoeveelheid warmte naar de koude kant en de andere helft naar de warme kant stroomt.

2. *Warmtestroom door geleiding binnen in het peltierelement*
   Het peltierelement geleidt door zijn bouw de warmte redelijk goed. Door deze eigenschap ontstaat er binnen in het peltierelement een warmtestroom per seconde die gelijk is aan:

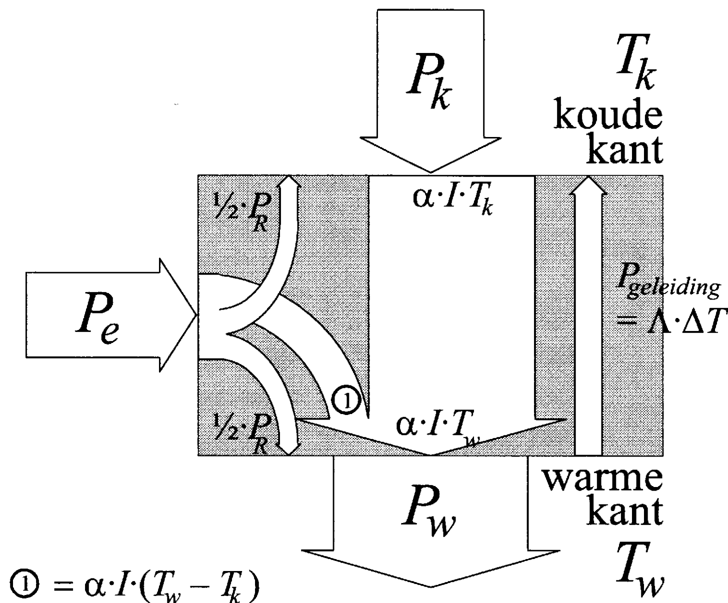
   $$P_{geleiding} = \Lambda_{el} \cdot \Delta T \tag{10.7}$$

   Deze warmte zal van de warme naar de koude kant stromen. Het warmtegeleidingsgetal Λ_{el} is weinig temperatuurafhankelijk en zal evenals de weerstand R_{el} in het hierop volgende als constant worden beschouwd.

De twee effecten zijn samengevat in het schema van figuur 10.5, waarin de warmtestromen binnen in het peltierelement zijn weergegeven.

---

[2] Immers: $U_{th} = \alpha \cdot \Delta T$, dus $P_e = U_{th} \cdot I = \alpha \cdot I \cdot \Delta T$



Figuur 10.5 - De werking van een peltierelement (2)

Met behulp van dit schema en de vergelijkingen 10.5 en 10.6 kunnen we voor de door het peltierelement opgenomen en afgegeven vermogens de volgende vergelijkingen opschrijven:

Het aan de koude kant opgenomen vermogen is gelijk aan:

$$P_k = \alpha \cdot I \cdot T_k - P_{geleiding} - \tfrac{1}{2} P_R = \alpha \cdot I \cdot T_k - \Lambda_{el} \cdot \Delta T - \tfrac{1}{2} R_{el} \cdot I^2 \qquad (10.8)$$

en het aan de warme kant afgegeven vermogen is:

$$P_w = \alpha \cdot I \cdot T_w - P_{geleiding} + \tfrac{1}{2} P_R = \alpha \cdot I \cdot T_w - \Lambda_{el} \cdot \Delta T + \tfrac{1}{2} R_{el} \cdot I^2 \qquad (10.9)$$

Het door de batterij opgenomen elektrisch vermogen wordt gegeven door:

$$P_e = \alpha \cdot I \cdot (T_w - T_k) + P_R = \alpha \cdot I \cdot \Delta T + R_{el} \cdot I^2 \qquad (10.10)$$

De bovenstaande drie vergelijkingen beschrijven het gedrag van een peltierelement.

Voor een Peltier-batterij bestaande uit *n* peltierelementen worden deze drie vergelijkingen:

$$P_k = n \cdot \alpha \cdot I \cdot T_k - \Lambda \cdot \Delta T - \tfrac{1}{2} R \cdot I^2 \qquad (10.11)$$

$$P_w = n \cdot \alpha \cdot I \cdot T_w - \Lambda \cdot \Delta T + \tfrac{1}{2} R \cdot I^2 \qquad (10.12)$$

$$P_e = n \cdot \alpha \cdot I \cdot \Delta T + R \cdot I^2 \qquad (10.13)$$

waarin Λ het totale warmtegeleidingsgetal en R de totale elektrische weerstand van de Peltier-batterij zijn. Uit deze drie vergelijkingen kunnen alle essentiële eigenschappen worden afgeleid door geschikte keuzen van variaties in meetbare grootheden.

Opmerkingen:

1. Merk op dat nog steeds geldt:
$$P_e = P_w - P_k$$
2. De spanning U over de batterij vinden we door vergelijking 10.13 door de stroomsterkte te delen:
$$U = \frac{P_e}{I} = n \cdot \alpha \cdot \Delta T + I \cdot R = U_{th} + U_R \qquad (10.14)$$
3. Uit vergelijking 10.11 kunnen we zien dat hoe groter de seebeckcoëfficiënt α en hoe kleiner de weerstand R en het warmtegeleidingsgetal Λ zijn, hoe groter de nuttige koeling wordt.

10.2.2 De Peltier-batterij in een meetopstelling

Als de Peltier-batterij in een meetopstelling wordt gebruikt, dan zal de omgeving van de Peltier-batterij ervoor zorgen dat zich na enige tijd een evenwicht instelt, waarbij de temperaturen T_w en T_k aan de warme en de koude kant constant worden.

Bij het practicum zal aan de warme kant de temperatuur constant gehouden worden door deze kant te koelen met koelwater.
Aan de koude kant wordt door middel van een *stookweerstand* een vermogen P_{stook} opgenomen. Daarnaast zal er als T_k lager of hoger wordt dan de omgevingstemperatuur een warmtelek van of naar de omgeving ontstaan. In evenwicht geldt:

$$P_k = P_{stook} + P_{warmtelek} \qquad (10.15)$$

waarin:

$$P_{warmtelek} = K \cdot (T_0 - T_k) \qquad (10.16)$$

Hierin is T_0 de omgevingstemperatuur en K het warmtegeleidingsgetal horend bij het warmtelek naar de omgeving.

Indien er geen stroom door de Peltier-batterij loopt, zal als gevolg van het toegevoerde stookvermogen de temperatuur aan de koude kant toenemen (en zelfs boven de temperatuur aan de 'warme' kant of de omgevingstemperatuur kunnen uitkomen). Er ontstaat een evenwicht tussen de toegevoerde stookwarmte, de aan de omgeving afgegeven lekwarmte en de geleidingswarmte door de Peltier-batterij.

$$P_{stook} = -\Lambda \cdot \Delta T - K(T_0 - T_k) = -(\Lambda + K)\Delta T - K(T_0 - T_w) \qquad (10.17)$$

Zodra er een spanning over de Peltier-batterij wordt gezet en er een stroom gaat lopen gaat de batterij beginnen met koelen. De temperatuur aan de koude kant zal dalen tot er een nieuw evenwicht bereikt wordt.

10.2.3 Enkele karakteristieke eigenschappen van Peltier-batterijen

We zullen aan de hand van de voorgaande theorie nagaan hoe de werking van het element afhangt van de te gebruiken stroomsterkte. Wanneer de stroom is ingeschakeld zal zich na verloop van tijd een evenwichtstoestand instellen waarbij ΔT constant blijft. Dit is het geval als uit de omgeving naar de koude kant stromende warmte precies even groot is als de nuttige

koeling P_k. Beter gezegd: de evenwichtstoestand wordt bereikt bij dat temperatuurverschil ΔT waarbij P_k gelijk is aan het aan de koude zijde toegevoerde vermogen.

Als dit laatste vermogen constant is dan wordt de evenwichtssituatie dus onafhankelijk van de stroom steeds bij dezelfde P_k bereikt. Het temperatuurverschil dat ontstaat is daarmee echter nog niet bekend daar P_k afhankelijk is van de grootte van T_k en T_w en niet alleen van hun verschil. Het verloop van ΔT als functie van de stroom is dus alleen aan te geven als men één van beide temperaturen bekend veronderstelt.

We nemen nu aan dat, zoals bij koeling vaak het geval is, de warme kant in contact staat met een lichaam van constante temperatuur (theoretisch oneindig uitgestrekt b.v. een koelwaterleiding) waaraan de warme kant makkelijk zijn warmte kan afstaan. Het gevolg is dat de warme kant een constante temperatuur T_w houdt zodat bij gegeven P_k en I de grootheden P_w en dus ΔT vastliggen.

Door $T_k = T_w - \Delta T$ te nemen, kunnen we nu vergelijking 10.11 omwerken tot:

$$\Delta T = \frac{n\alpha I T_w}{n\alpha I + \Lambda} - \frac{RI^2}{2(n\alpha I + \Lambda)} - \frac{P_k}{n\alpha I + \Lambda} \qquad (10.18)$$

Als we aannemen dat $n\alpha I \ll \Lambda$, dan kunnen we vergelijking 10.18 in een vorm schrijven die eenvoudig grafisch te interpreteren is. Hierbij moet men wel beseffen dat **in de werkelijkheid vrijwel nooit aan de voorwaarde $n\alpha I \ll \Lambda$ is te voldoen.**
We vinden in deze benadering:

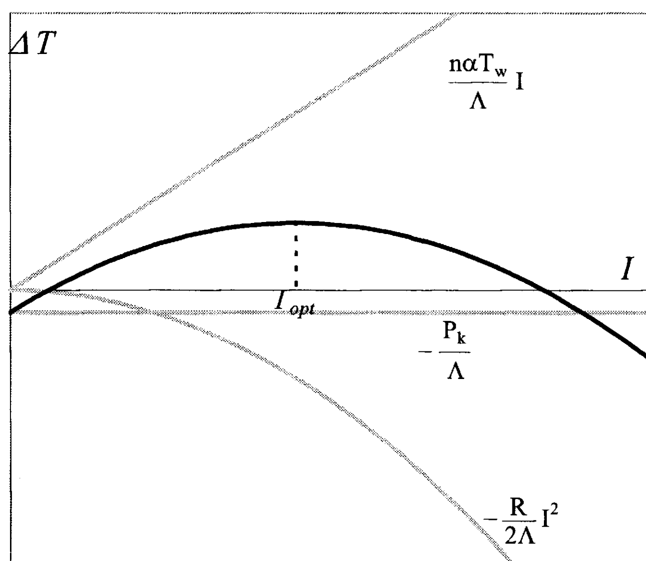
$$\Delta T = \frac{n\alpha T_w}{\Lambda} I - \frac{R}{2\Lambda} I^2 - \frac{P_k}{\Lambda} \qquad (10.19)$$

Vergelijking 10.19 is een tweedegraads polynoom met I als variabele. In figuur 10.6 zijn de drie termen van dit polynoom apart voorgesteld (lichtgekleurde lijnen) en vervolgens opgeteld (zwarte lijn).

Uit de grafiek blijkt dat er een *optimale stroomsterkte* I_{opt} is, waarbij ΔT een maximale waarde heeft. De grootte van P_k heeft geen invloed op de waarde van I_{opt}, aangezien een andere waarde voor P_k alleen een verschuiving in verticale richting tot gevolg heeft. In de realiteit zal de grafiek van vergelijking 10.18, de eigenlijke ΔT-kromme dus, wegens de voorheen verwaarloosde term $n\alpha I$ in de noemer van 10.18 overal een wat kleinere absolute waarde van ΔT te zien geven en niet meer zuiver parabolisch verlopen. Ook zal I_{opt} niet onafhankelijk van P_k zijn.

Opmerking:
Wanneer in een hoeveelheid materie gelijktijdig een warmtestroom en een elektrische stroom lopen wordt er behalve de *Joule-warmte* I^2R nog een hoeveelheid extra warmte ontwikkeld of opgenomen.

Deze extra warmte heet naar haar ontdekker de *Thomson-warmte*. Hebben de warmtestroom en de elektrische stroom dezelfde richting dan wordt er warmte opgenomen. Voor de Peltier-batterij die op het practicum wordt gebruikt is de invloed van de Thomson-warmte op de



Figuur 10.6 - Verband tussen temperatuurverschil en stroomsterkte bij constante P_k ονδερ δε ϖοορωααρδε ναI<<Λ.

meetresultaten gezien de meetnauwkeurigheid te verwaarlozen.

10.3 Temperatuurmeting

Om de temperatuur te kunnen bepalen, moet altijd gebruik gemaakt worden van indirecte methoden, omdat rechtstreekse meting niet mogelijk is. Elke methode heeft voordelen en nadelen. De keuze voor een bepaalde methode wordt bepaald door het doel van de temperatuurmeting. Bekende methoden zijn: *thermometer* (bijvoorbeeld *kwik-* of *alcoholthermometer*), *thermokoppel* en m.b.v. elektronische componenten zoals een *NTC-weerstand* of een *diode*. Bij elke meting moet een ijking uitgevoerd worden. Dat gebeurt bij standaardtemperaturen, bijvoorbeeld het smeltpunt van ijs bij 1 atm en het kookpunt van water bij 1 atm.

10.3.1 Temperatuurmeting met thermokoppels

Thermokoppels (zie paragraaf 10.1.1) worden veel gebruikt voor het meten van temperaturen omdat ze de volgende voordelen hebben:

a. ze zijn in een zeer groot temperatuurgebied bruikbaar (-200 °C tot ca. 1500 °C);
b. ze zijn in een beperkt temperatuurinterval redelijk lineair;
c. ze hebben een zeer lage warmtecapaciteit en geven daardoor een snelle respons;
d. ze zijn stabiel in de tijd;
e. ze zijn klein en gemakkelijk aan te brengen;
f. ze zijn tegen mechanische trillingen en stoten en ook tegen zeer hoge drukken bestand;
g. het signaal is eenvoudig op afstand afleesbaar te maken, zodat dit signaal aan bijvoorbeeld een xt-schrijver kan worden toegevoerd.

Men moet er wel op bedacht zijn dat warmte wordt "afgevoerd" door het thermokoppel, zodat bij meetobjecten met relatief kleine warmtecapaciteiten grote meetfouten kunnen worden gemaakt.
Een andere fout treedt op bij het meten aan objecten die slechte warmtegeleiders zijn zoals glas; ter plaatse van de las (het meetpunt) kunnen belangrijke veranderingen in de temperatuurverdeling optreden.
De materialen die voor de constructie van thermokoppels gebruikt kunnen worden zijn te rangschikken in een zogenaamde *thermo-elektrische spanningsreeks* (zie tabel 10.1). Maakt men een thermokoppel uit twee materialen uit de reeks, dan is de seebeckcoëfficiënt α (de thermospanning per graad Celsius) gelijk aan het verschil tussen de waarden in de tabel.

Voorbeeld:
Kiest men voor metaal p ijzer (Fe) en voor metaal q nikkel (Ni), dan volgt uit de tabel:

$$\alpha = (88 - 55) = 33\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$$

zodat in de buurt van 0 °C geldt:

$$U_{th} = 33 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta T \qquad (10.20)$$

In tabel 10.2 staat een lijst met enkele veel voorkomende thermokoppels.

Tabel 10.1: Thermo-elektrische spanningsreeks in µV/°C (bij T = 0 °C)

Materiaal	**(µV/°C)**	**Materiaal**	**(µV/°C)**
Te	570	Manganine 1)	76
Si	520	Sn	74.5
Sb	120	Pb	74.5
Fe	88	Mg	74
W	78	Al	74
Cu	77.5	Hg	70
Au	77	Pt	70
Ag	77	Ni	55
Zn	77	Co	54
Rh	76.5	Constantaan 2)	36
Ir	76	Bi	0

1) 88% Cu, 12% Mn, 0,04% Ni
2) 55% Cu, 45% Ni

Tabel 10.2: Veel gebruikte combinaties

Positief	**Negatief**	**Temperatuur-interval**		**seebeckcoëfficiënt bij 0 °C**
Cu	Constantaan	– 200 °C	+ 400 °C	ca. 39 µV/°C
Fe	Constantaan	0 °C	+ 750 °C	ca. 52 µV/°C
Chromel 1)	Alumel 2)	– 200 °C	+ 1100 °C	ca. 40 µV/°C
NiCr (10% Cr)	Ni	0 °C	+ 1100 °C	ca. 39 µV/°C
PtRh (10% Rh)	Pt	0 °C	+ 1500 °C	
Pt	Ir			

1) 89% Ni, 10% Cr, 1% Fe
2) 94,5% Ni, 2% Al, 1% Si, 2,5% Mn

Teneinde metingen te kunnen uitvoeren moet men een lasplaats op een referentietemperatuur houden. Men spreekt meestal van koude las (referentie) en brengt deze las in het laboratorium in een bakje met fijn verdeelde schilfers smeltend ijs of in een dewarvat met vloeibare verdampende stikstof (77K).
In een aantal praktische gevallen houdt men de referentie op omgevingstemperatuur; dit laatste heeft nadelen in verband met fluctuaties in de omgevingstemperatuur. Soms wordt hiervoor weer gecompenseerd met een temperatuurafhankelijke weerstand in een elektrische brugschakeling dan wel in een differentiaalschakeling. Om het peltiereffekt te vermijden wordt soms met een compensatieschakeling - dus in stroomloze toestand - gemeten.

10.3.2 Temperatuurmeting met NTC-weerstand

Weerstanden die uit halfgeleiders bestaan, worden verdeeld in weerstanden met een negatieve temperatuurcoëfficiënt (NTC) en weerstanden met een positieve temperatuurcoëfficiënt (PTC).

Voor een NTC-weerstand geldt:

$$R = Ae^{B/T}$$ (A en B zijn constanten)

$$\frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2}R \qquad \alpha = \frac{\frac{dR}{dT}}{R} = -\frac{B}{T^2}$$

10.3.3 Temperatuurmeting met Diode

Halfgeleiderdioden worden ook gebruikt als temperatuursensor. Als de diode in de doorlaatrichting aangesloten is, staat er ongeveer 0,7 V over de diode.

Deze spanning is echter temperatuurafhankelijk, $\frac{dV}{dt} \approx 2mV\ /\ K$ rond kamertemperatuur.

Dit is veel meer dan bij een thermokoppel (koper/constantaan, circa 40 µV/K), zodat je met een diode veel kleinere temperatuurverschillen kunt meten. De lineariteit is echter veel slechter.

11 Geometrische Optica

11.1 Rechtlijnige voortplanting en breking

11.1.1 Brekingsindex en dispersie

De geometrische optica maakt gebruik van het concept *lichtstraal*. We kunnen ons een lichtstraal voorstellen als de weg die gevolgd wordt door een infinitesimaal klein pakketje monochromatisch (d.w.z. dat het licht slechts één golflengte bevat) licht. De snelheid waarmee lichtenergie zich voortplant in vacuüm wordt gegeven door c:

$$c = 2{,}997924562 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Brekingsindex

In vacuüm is de lichtsnelheid voor iedere golflengte λ hetzelfde. In een medium is de lichtsnelheid altijd lager. De verhouding tussen c en de snelheid in het medium v wordt per definitie de *brekingsindex* n van het medium genoemd.

$$n \equiv \frac{c}{v} \tag{11.1}$$

Dispersie

De lichtsnelheid in een medium, en dus ook de brekingsindex, is over het algemeen afhankelijk van de golflengte van het licht zodat:

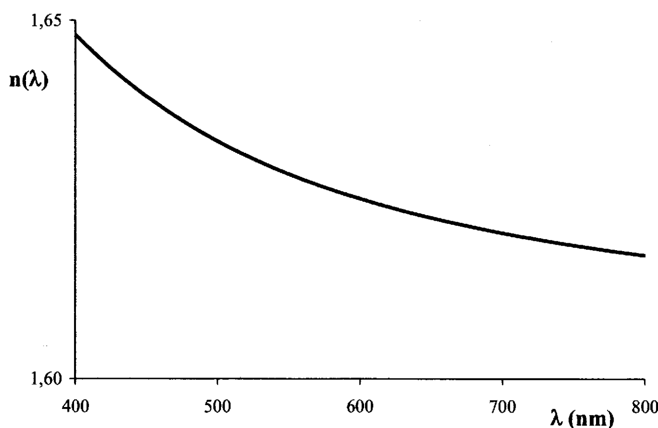
$$n(\lambda) \equiv \frac{c}{v(\lambda)} \tag{11.2}$$

Dit verschijnsel noemt men *dispersie.*

Bij de meeste transparante materialen neemt de brekingsindex af als de golflengte groter wordt. Men noemt dit *normale dispersie.* Cauchy heeft, voor de normale dispersie, een empirische vergelijking gevonden voor de golflengteafhankelijkheid van de brekingsindex in de vorm van een machtreeksontwikkeling:

$$n(\lambda) = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^4} + \cdots \tag{11.3}$$

waarin de C 's constanten zijn, die afhankelijk zijn van het materiaal.



Figuur 11.1 – normale dispersie in kroonglas

In de buurt van absorptielijnen van een medium neemt de brekingsindex meestal toe (*anomale dispersie*) als de golflengte toeneemt. Vandaar dat in de buurt van de absorptielijnen van een medium de vergelijking van Cauchy niet meer geldt.

11.1.2 Optische weglengte. Principe van Fermat

Indien een lichtstraal een bepaalde afstand d in een medium aflegt wordt per definitie de *optische weglengte* of *optische dikte* t gegeven door het product van d en de brekingsindex n van het medium:

$$t \equiv nd \tag{11.4}$$

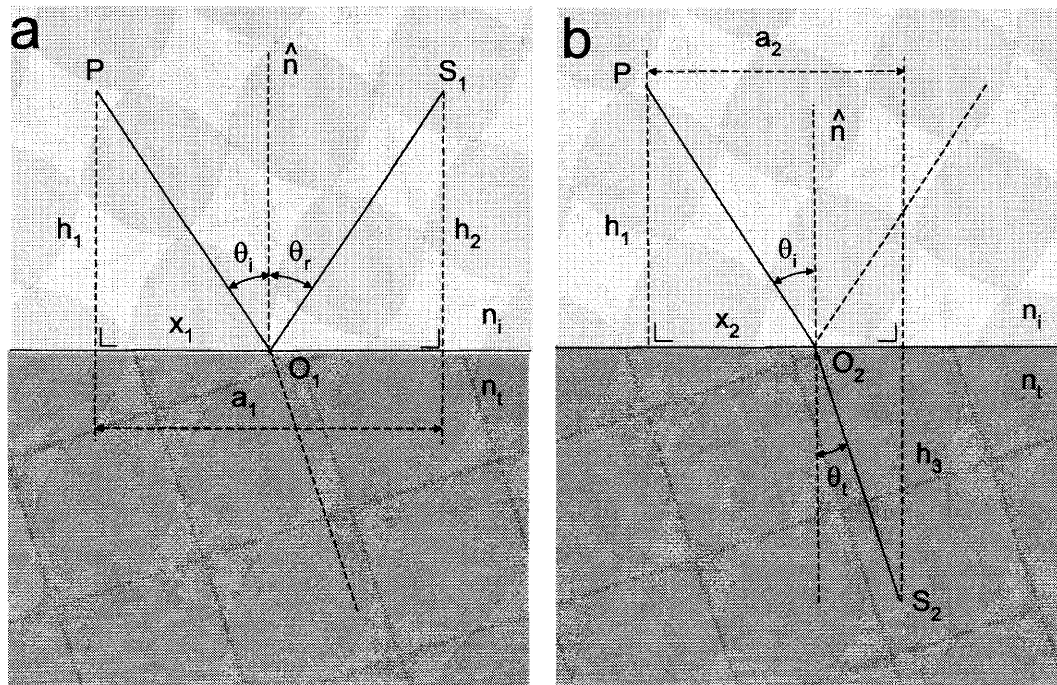
Ons uitgangspunt (waarvoor geen bewijs wordt geleverd) bij de geometrische optica is het *principe van Fermat*. Dit luidt als volgt:

> **Principe van Fermat**
> Licht dat zich voortplant van een bepaald punt P naar een ander punt S zal dat zo doen dat de optische weglengte een extreme waarde heeft (meestal is dit de minimale waarde).

Uit dit principe zijn de bekende terugkaatsingswet (reflectiewet) en de brekingswet van Snellius af te leiden, zoals we in de volgende paragraaf zullen zien.

11.1.3 Afleiding van de reflectiewet en de wet van Snellius

We zullen het principe van Fermat gebruiken bij reflectie en transmissie (breking) aan een grensvlak tussen twee verschillende media met brekingsindices n_i en n_t. Als licht invalt op een grensvlak wordt een gedeelte gereflecteerd en een gedeelte doorgelaten. De vraag is nu welke weg de lichtstraal gaat als hij vertrekt uit het punt P en via reflectie door het punt S_1 moet gaan (zie figuur 11.2a) of via transmissie door het punt S_2 moet gaan (zie figuur 11.2b).



Figuur 11.2 – reflectie (a) en breking (b) van een lichtstraal aan een oppervlak.

Uit het principe van Fermat volgt direct dat binnen beide media de lichtstralen rechte lijnen zijn. De reflectieweg gaat dus via de gebroken lijn PO_1S_1 en de transmissieweg via PO_2S_2 waarbij de posities van O_1 en O_2 (en dus de lengten x_1 en x_2) nog onbepaald zijn. De optische weglengte bij reflectie is:

$$t_1(x_1) = n_i PO_1 + n_i O_1 S_1 = n_i \left(h_1^2 + x_1^2\right)^{1/2} + n_i \left(h_2^2 + (a_1 - x_1)^2\right)^{1/2} \tag{11.5}$$

en bij transmissie:

$$t_2(x_2) = n_i PO_2 + n_t O_2 S_2 = n_i \left(h_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} + n_t \left(h_3^2 + (a_2 - x_2)^2\right)^{1/2} \tag{11.6}$$

De minimum waarde wordt gevonden door $t_1(x_1)$ en $t_2(x_2)$ te differentiëren en het resultaat nul te stellen:

$$\frac{dt_1}{dx_1} = \frac{n_i x_1}{\left(h_1^2 + x_1^2\right)^{1/2}} - \frac{n_i (a_1 - x_1)}{\left(h_2^2 + (a_1 - x_1)^2\right)^{1/2}} = 0 \tag{11.7}$$

$$\frac{dt_2}{dx_2} = \frac{n_i x_2}{\left(h_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}} - \frac{n_t (a_2 - x_2)}{\left(h_3^2 + (a_2 - x_2)^2\right)^{1/2}} = 0 \tag{11.8}$$

Omdat:

$$\sin\theta_i = \frac{x_1}{\left(h_1^2 + x_1^2\right)^{1/2}} \text{ of } = \frac{x_2}{\left(h_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}} \tag{11.9}$$

$$\sin\theta_r = \frac{a_1 - x_1}{\left(h_2^2 + (a_1 - x_1)^2\right)^{1/2}} \tag{11.10}$$

$$\sin\theta_t = \frac{a_2 - x_2}{\left(h_3^2 + (a_2 - x_2)^2\right)^{1/2}} \tag{11.11}$$

waarin de hoeken zijn gedefinieerd t.o.v. de normaal $\hat{n}$ op het oppervlak, volgt uit (11.7) de *reflectiewet*:

$$\theta_i = \theta_r \tag{11.12}$$

en uit (11.8) de *wet van Snellius*:

$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_t}{n_i} \tag{11.13}$$

Uit (11.13) kan men zien dat er een probleem bestaat als we van een optisch dichter naar een optisch minder dicht medium (ofwel $n_i > n_t$) gaan en de invalshoek θ_i groter is dan de zogenaamde *grenshoek* θ_{gr} gegeven door:

$$\sin\theta_{gr} = \frac{n_t}{n_i} \tag{11.14}$$

Voor hoeken groter dan deze grenshoek bestaat θ_t niet omdat dan $\sin\theta_t > 1$ zou moeten zijn. Er vindt geen transmissie van licht plaats zodat we *volledige reflectie* hebben. Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt bij reflectieprisma's (zie paragraaf 11.1.4).

11.1.4 Prisma's

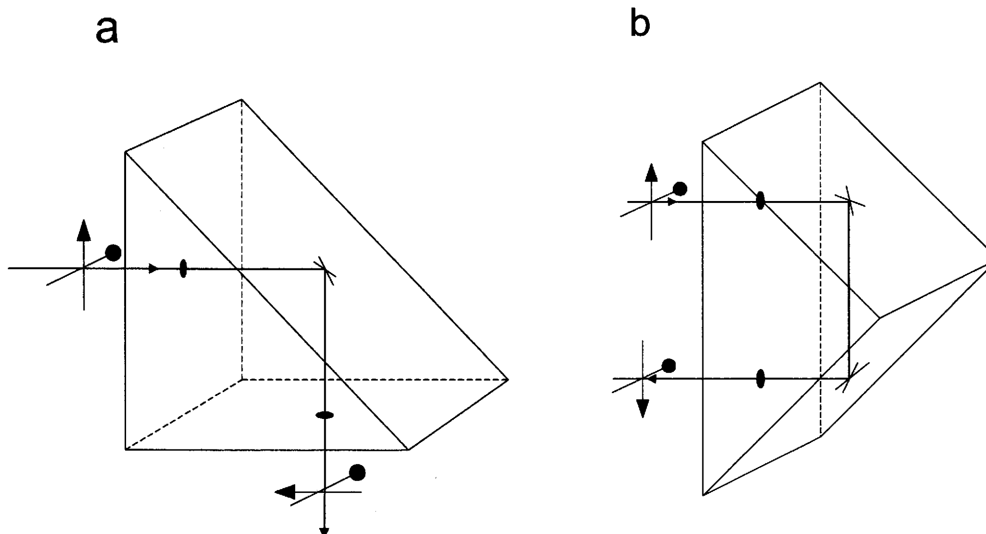
Prisma's kunnen, aan de hand van hun gebruikswijze, in twee categorieën worden ingedeeld:

1. *reflectieprisma's*, waarbij het prisma gebruikt wordt om de richting van lichtstralen te veranderen, zoals bij een spiegel,
2. *dispergerende prisma's*, waarbij de dispersie van het materiaal waarvan het prisma gemaakt is wordt gebruikt om de diverse golflengtes in het opvallende licht te scheiden. Zo is het mogelijk om absorbtie- en emissiespectra zichtbaar te maken, zoals dat ook kan met een buigingstralie.

Beide soorten prisma's worden in de rest van deze paragraaf in wat meer detail besproken.

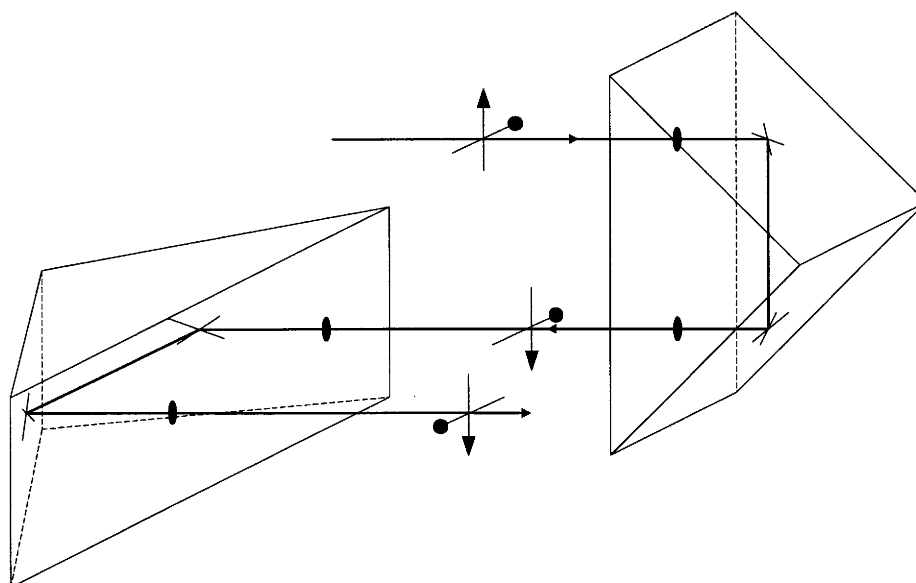
Reflectieprisma's

Bij reflectieprisma's wordt van de eigenschap gebruik gemaakt dat voor invalshoeken groter dan de grenshoek volledige reflectie optreedt. In figuur 11.3 zijn twee prisma's afgebeeld: figuur 11.3a is een rechthoekprisma en figuur 11.3b een zogenaamd Porroprisma. Aan de schuine zijde(n) van ieder prisma vindt volledige reflectie plaats doordat de invalshoek (45°) groter is dan de grenshoek (voor een brekingsindex $n_{\text{prisma}}=1,5$ wordt de grenshoek gegeven door $\theta_{gr} \cong 41,8°$).



Figuur 11.3 – gebruik van een prisma als reflectie element.
a: Rechthoek prisma.
b: Porro prisma.

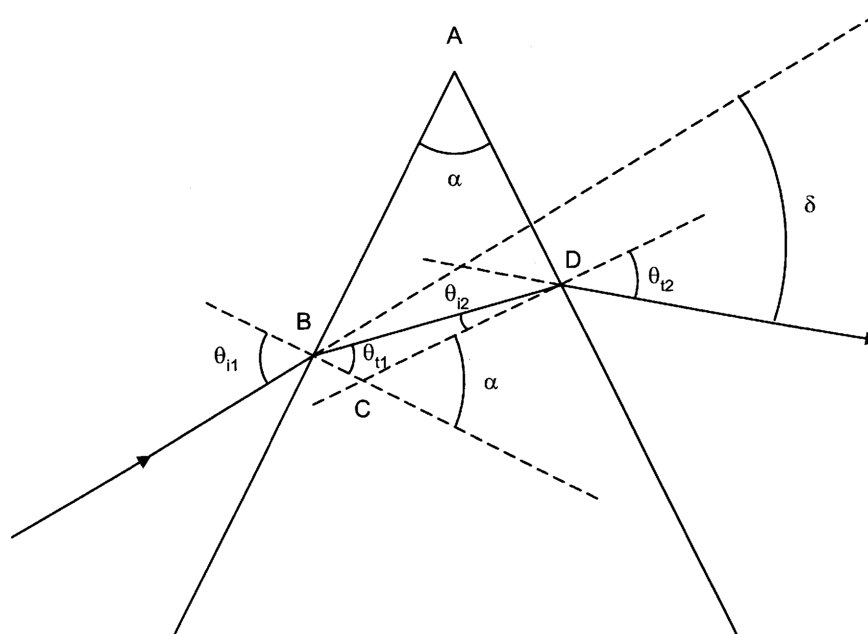
Een belangrijke toepassing van Porroprisma's vindt men bijvoorbeeld in verrekijkers waar twee van dergelijke prisma's worden gebruikt om het beeld dat door de kijker wordt gevormd weer rechtop te zetten (zie figuur 11.4).



Figuur 11.4 – gebruik van twee Porro prisma's in een verrekijker.

Dispergerend prisma

In de prismaopstelling zoals gegeven in figuur 11.5 wordt de lichtstraal zowel aan het voor- als achtervlak gebroken volgens de wet van Snellius zodat de uittredende lichtstraal een hoek δ (de zg. *hoek van deviatie*) maakt met de invallende lichtstraal.



Figuur 11.5 – stralengang door een prisma

Omdat de brekingsindex n afhankelijk is van de golflengte, zal ook de hoek van deviatie δ afhankelijk zijn van de golflengte. Licht dat meerdere golflengtes bevat zal dus door het prisma in een spectrum worden gesplitst (vandaar ook de naam 'dispergerend prisma').

Deze eigenschap kunnen we gebruiken om de golflengteafhankelijkheid van de brekingsindex van het materiaal waarvan het prisma gemaakt is (de dispersie dus) te bepalen. Hiertoe moeten we eerst de hoek van deviatie δ uitdrukken in de hoek van inval θ_{i1} en de brekingsindex n. In figuur 11.5 zien we dat:

$$\delta = (\theta_{i1} - \theta_{t1}) + (\theta_{t2} - \theta_{i2}) \tag{11.15}$$

Omdat de vierhoek ABCD twee rechte hoeken heeft, is $\angle$BCD het supplement van de tophoek α van het prisma, zodat:

$$\alpha = \theta_{t1} + \theta_{i2} \tag{11.16}$$

en:

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} - \alpha \tag{11.17}$$

Indien de brekingsindex van het prisma n is en het prisma in lucht ($n \cong 1$) staat volgt uit de wet van Snellius:

$$\begin{aligned}\theta_{t2} &= \arcsin(n \sin\theta_{i2}) = \arcsin(n \sin(\alpha - \theta_{t1})) \\ &= \arcsin(n(\sin\alpha \cos\theta_{t1} - \cos\alpha \sin\theta_{t1}))\end{aligned} \tag{11.18}$$

Vervanging van $\cos\theta_{t1}$ door $(1-\sin^2\theta_{t1})^{1/2}$ en gebruikmaking van de wet van Snellius geeft:

$$\theta_{t2} = \arcsin\left((\sin\alpha)(n^2 - \sin^2\theta_{i1})^{1/2} - \sin\theta_{i1}\cos\alpha \right) \tag{11.19}$$

en:

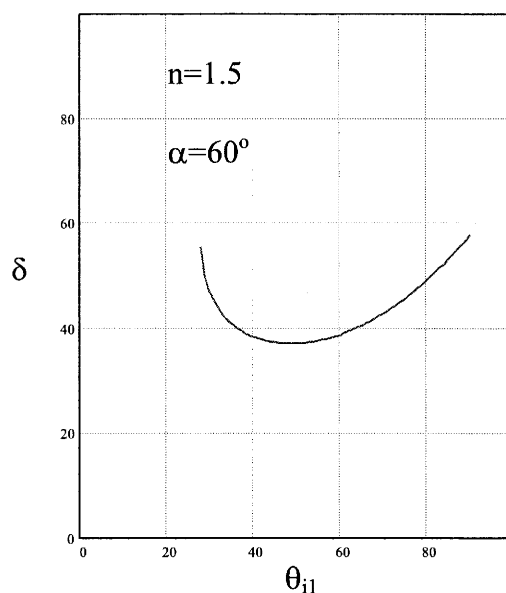
$$\delta = \theta_{i1} + \arcsin\left((\sin\alpha)(n^2 - \sin^2\theta_{i1})^{1/2} - \sin\theta_{i1}\cos\alpha \right) - \alpha \tag{11.20}$$

Uit vergelijking 11.20 kunnen we direct zien dat δ toeneemt als n groter wordt. Aangezien voor de meeste transparante materialen n afneemt met toenemende λ, zal δ afnemen met toenemende λ.

Een plot van δ als functie van θ_{i1} (zie figuur 11.6) laat zien dat er een hoek van minimumdeviatie δ_m bestaat. Aangezien dit minimum experimenteel vrij goed te bepalen is, zullen we nu het verband tussen de brekingsindex en de minimumdeviatie onderzoeken.

De ligging van het minimum kan bepaald worden door differentiatie van vergelijking (11.17):

$$\frac{d\delta}{d\theta_{i1}} = 1 + \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = 0 \tag{11.21}$$



Figuur 11.6 – deviatie hoek als functie van de hoek van inval op een prisma.

Vergelijking (11.21) kunnen we het gebruiken om te laten zien dat bij minimumdeviatie de hoek van inval gelijk is aan de hoek van breking bij het verlaten van het tweede oppervlak. Dit kunnen we het snelst laten zien door de Wet van Snellius aan beide grensvlakken te differentiëren:

$$\begin{aligned} \cos\theta_{i1} d\theta_{i1} &= n\cos\theta_{t1} d\theta_{t1} \\ \cos\theta_{t2} d\theta_{t2} &= n\cos\theta_{i2} d\theta_{i2} \end{aligned} \qquad (11.22)$$

Delen van deze twee vergelijkingen geeft samen met (11.16) en (11.21):

$$\frac{\cos\theta_{i1}}{\cos\theta_{t2}} = \frac{\cos\theta_{t1}}{\cos\theta_{i2}} \qquad (11.23)$$

Gebruikmaking van de wet van Snellius geeft:

$$\frac{1-\sin^2\theta_{i1}}{1-\sin^2\theta_{t2}} = \frac{n^2-\sin^2\theta_{i1}}{n^2-\sin^2\theta_{t2}} \qquad (11.24)$$

Omdat n>1 volgt uit (11.24):

$$\theta_{i1} = \theta_{t2} \qquad (11.25)$$

en is ook:

$$\theta_{t1} = \theta_{i2} \qquad (11.26)$$

Met andere woorden bij minimumdeviatie loopt de straal symmetrisch door het prisma! Uit (11.17) volgt:

$$\theta_{i1} = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \qquad (11.27)$$

en uit (11.16):

$$\theta_{t1} = \frac{\alpha}{2} \qquad (11.28)$$

De wet van Snellius aan het eerste oppervlak geeft dan:

$$n = \frac{\sin[(\delta_m + \alpha)/2]}{\sin \alpha/2} \qquad (11.29)$$

Deze vergelijking vormt de basis van een van de meest nauwkeurige methoden om van transparante materialen de brekingsindex te bepalen.

Hoekdispersie van een prisma

In het voorafgaande hebben we het dispergerend prisma gebruikt om de golflengteafhankelijkheid van de brekingsindex van het prismamateriaal te bepalen. Het dispergerend prisma wordt echter ook vaak gebruikt om licht in zijn samenstellende golflengtes te scheiden. Hiervoor is de zogenaamde hoekdispersie $d\delta/d\lambda$ van het prisma belangrijk. De hoekdispersie geeft aan hoeveel de dispersiehoek verandert als de golflengte verandert, en is dus een maat voor het vermogen van het prisma om golflengtes van elkaar te scheiden. De hoekdispersie van het prisma moet niet verward worden met de dispersie $n(\lambda)$ van het materiaal waarvan het prisma gemaakt is.

Om de hoekdispersie te kunnen berekenen, merken we op dat de golflengteafhankelijkheid van de deviatiehoek veroorzaakt wordt door de brekingsindex van het prisma, die immers golflengteafhankelijk is.

Differentiatie van (11.20) geeft:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{1}{\left[1 - \left[(\sin\alpha)(n^2 - \sin^2\theta_{i1})^{1/2} - \sin\theta_{i1}\cos\alpha\right]^2\right]^{1/2}} \frac{n \sin\alpha(dn/d\lambda)}{(n^2 - \sin^2\theta_{i1})^{1/2}} \qquad (11.30)$$

Gebruik van (11.19) en de wet van Snellius geeft:

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{1}{\left[1 - \sin^2\theta_{t2}\right]^{1/2}} \frac{\sin\alpha(dn/d\lambda)}{\cos\theta_{t1}} \qquad (11.31)$$

Indien het prisma onder de hoek van minimum deviatie wordt gebruikt volgt via (11.27) en (11.28) voor de hoekdispersie van het prisma:

$$\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right)_{\delta=\delta_m} = \frac{2\sin(\alpha/2)}{\left[1 - n^2\sin^2(\alpha/2)\right]^{1/2}} \frac{dn}{d\lambda} \qquad (11.32)$$

Uit deze vergelijking volgt dat de prisma hoekdispersie afhangt van de tophoek α.

11.2 Afbeeldingsfouten

11.2.1 Inleiding

Een van de basisproblemen van lenzen en lenssystemen is de imperfecte kwaliteit van het beeld. *Afbeeldingsfouten of aberraties* zijn vaak het resultaat van defecten in de vorm van de lenzen.
Om de beeldvorming van een voorwerp door een willekeurige lens of lenzenstelsel te kunnen bestuderen wordt vaak gebruik gemaakt van het zg. *paraxiale model.* Bij het paraxiale model beperken we ons tot systemen waarbij de lichtbundel niet al te ver van de optische as van het systeem vandaan komt (men noemt dit paraxiale voortplanting). Dit betekent dat de afstanden van de lichtstraal tot de optische as en de hoeken die de lichtstraal maakt t.o.v. de optische as klein zijn.
In de natuurkunde worden modellen gebruikt om bepaalde verschijnselen te verklaren en andere te voorspellen. Ieder model heeft echter zijn beperkingen. Een belangrijke taak van de natuurkunde is het opstellen van dergelijke modellen en het doen van experimenten om de geldigheid en toepassingsbegrenzing van de modellen te bepalen. Ook het model van de paraxiale afbeeldingen heeft zijn begrenzingen. Deze grenzen worden bepaald door het volgende:

1. *buiging van het licht.*
   In de inleiding hebben we er al op gewezen dat de nauwkeurigheid van de afbeelding wordt beïnvloed door het feit dat licht zich niet rechtlijnig voortplant. Deze afwijkingen zijn van belang als de afmetingen van het optisch systeem niet meer als groot t.o.v. de golflengte van het licht mogen worden verondersteld. De beschrijving van *buigingsverschijnselen* gebeurt in de fysische optica die in het tweede jaar wordt behandeld.

2. *niet paraxiaal zijn van de stralen.*
   In het paraxiale model wordt gebruik gemaakt van de benadering $\sin\theta \cong \theta$ en $\tan\varphi \cong \varphi$. Indien de hoek die een lichtstraal maakt met de optische as te groot wordt kan deze benadering niet meer toegepast worden.

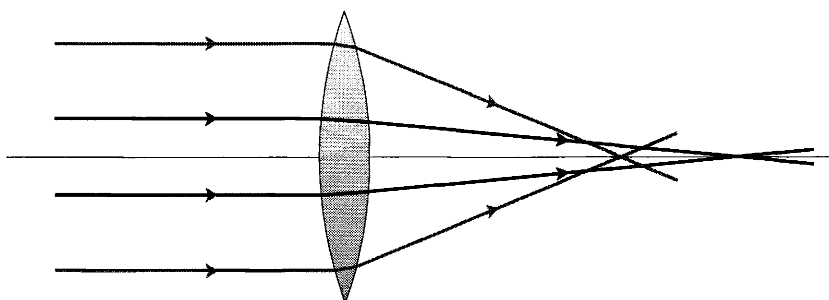
3. *dispersie-eigenschappen van optische materialen.*
   In het model zoals we dat tot nu toe hebben gebruikt is aangenomen dat de brekingsindex onafhankelijk is van de golflengte van het licht. In hoofdstuk 9 hebben we al laten zien dat de breking van stralen aan een grensvlak niet voor iedere golflengte op dezelfde manier gaat.

Het paraxiale model is een eerste orde benadering van de werkelijkheid. Zodra niet meer voldaan is aan bovenstaande voorwaarden gaat de stralengang afwijken van het model en treden er aberraties op. Er zijn twee hoofdtypes aberraties te onderscheiden: *Chromatische aberraties* a.g.v. het feit dat de brekingsindex eigenlijk een functie is van de golflengte en *Monochromatische aberraties*, afwijkingen die optreden zelfs met licht van één golflengte. Er zijn monochromatische aberraties zoals *sferische aberratie*, *coma* en *astigmatisme*, die het beeld verstoren en onscherp maken. Verder zijn er monochromatische aberraties die het beeld vervormen, zoals *Petzval veldkromming* en *distortie*. In de volgende paragrafen bespreken we twee afbeeldingsfouten in groter detail, nl. sferische aberratie en chromatische aberratie.
Over het algemeen neemt de brekingsindex van een materiaal, en dus de breking aan het oppervlak, af als de golflengte toeneemt. Ook het brandpunt en de posities van de hoofdvlakken

van een optisch systeem zullen daarom afhangen van de golflengte. Men noemt dit verschijnsel *chromatische aberratie.*

11.2.2 Sferische aberratie

In het paraxiale model kan aan ieder voorwerpspunt één-één-duidig een beeldpunt worden toegekend. Dit betekent dat alle stralen die vertrekken vanaf het voorwerpspunt door het beeldpunt gaan. Zonder die benadering gaan niet alle stralen door één punt. Zoals hierboven reeds is aangegeven zijn de monochromatische aberraties het gevolg van het in werkelijkheid niet paraxiaal zijn van de lichtstralen. De eenvoudigste aberratie heet sferische aberratie en doet zich voor bij stralen die afkomstig zijn van een puntbron op de as (als de puntbron oneindig ver weg ligt zijn het evenwijdig invallende stralen). Sferische aberratie is het verschijnsel dat de plaats van het beeldpunt afhangt van de hoogte waarop de lichtstraal het lensoppervlak raakt (zie figuur 11.7).



Figuur 11.7 – sferische aberratie

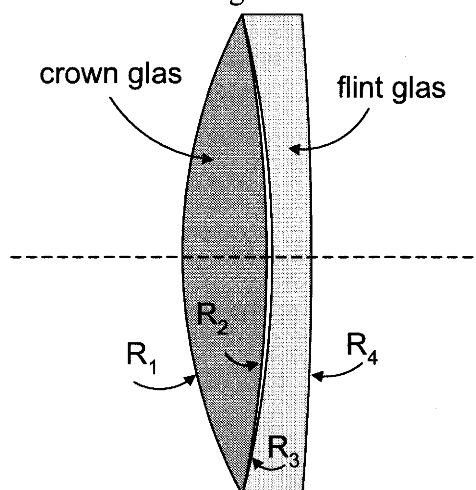
11.2.3 Chromatische aberratie

Zoals hierboven al is opgemerkt is dispersie van optische materialen de reden voor het bestaan van chromatische aberraties. Omdat de brekingsindex over het algemeen toeneemt met afnemende golflengte zal blauw licht door een positieve lens een focus hebben dat dichter bij de lens ligt dan rood licht. Dit wordt *axiale of longitudinale chromatische aberratie* (ACA) genoemd. Bovendien hebben de beelden die worden gevormd voor verschillende kleuren een verschillende grootte. Dit wordt *laterale chromatische aberratie* (LCA) genoemd. Een beeld gevormd in het "blauwe focus" is dichter bij de lens, kleiner en de blauwe details hebben een rode halo. Het "rode focus" is verder weg van de lens, is groter en de rode details hebben een blauwe halo.

Bij een dunne lens zijn ACA en LCA onlosmakelijk met elkaar verbonden; een kleiner beeld en een kortere brandpuntsafstand horen bij elkaar. Voor een willekeurig optisch systeem is dat niet zo. Stel dat we een afbeelding willen maken van een ver verwijderd voorwerp. LCA kan worden gecorrigeerd door de brandpuntsafstand voor de gewenste golflengten gelijk te maken. Immers dan is de vergroting van het voorwerp voor die golflengten gelijk. De plaats van het beeld hoeft echter niet voor beide golflengten gelijk te zijn omdat de positie van het hoofdvlak golflengteafhankelijk is! Omgekeerd kan ACA gecorrigeerd worden door de afstand A_2F_2 golflengteonafhankelijk te maken. Het beeld komt dan voor de gewenste golflengten op dezelfde plaats. Nu zal echter over het algemeen de brandpuntsafstand afhankelijk zijn van de golflengte zodat de vergroting verschillend is en de beelden voor verschillende golflengten toch niet over elkaar vallen.

Er zijn verschillende manieren om te corrigeren voor chromatische aberratie. Vaak wordt gebruik gemaakt van *achromatische doubletten*, gemaakt van *twee aan elkaar gekitte dunne len-*

zen van verschillende glassoorten, waarmee ACA en LCA beide tegelijkertijd kunnen worden gecorrigeerd. Zie figuur 11.8. Door twee positieve lenzen, gemaakt van hetzelfde materiaal, te zetten op een afstand gelijk aan de halve som van hun brandpuntsafstanden is een manier om voor LCA te corrigeren. In dat geval is de ACA echter groot! Om LCA en ACA beide te corrigeren moet minstens van een drietal lenzen gebruik worden gemaakt zoals in het zogenaamde Taylor triplet. Voor een willekeurig systeem is de eenvoudigste manier echter om zoveel mogelijk gebruik te maken van de bovengenoemde achromatische doubletten.



Figuur 11.8 –correctie voor chromatische aberratie d.m.v. een achromatisch doublet

11.3 Paraxiale voortplanting van lichtstralen in optische systemen

11.3.1 Inleiding

In deze paragraaf bekijken we optische systemen die bestaan uit een of meer achter elkaar geplaatste optische componenten, zoals lenzen en spiegels. We presenteren een wiskundig formalisme waarmee de gang van de lichtstralen en de beeldvorming in zo'n systeem beschreven kan worden.

Zolang we een enkele optische component gebruiken is een uitgebreid wiskundig formalisme meestal niet nodig. De plaats en de grootte van het beeld van een voorwerp dat wordt afgebeeld met een enkele dunne lens is vrij eenvoudig te berekenen met de bekende lenzenformule. Ook de beeldvorming en de beschrijving van de gang van de lichtstralen bij vlakke, holle of bolle spiegels leveren weinig problemen op. De situatie is anders wanneer we bijvoorbeeld gaan kijken naar meerdere achter elkaar geplaatste (ideale) optische componenten, zoals we die tegenkomen in vrijwel ieder optisch apparaat (denk bijvoorbeeld aan een fototoestel) en vele optische meetopstellingen. We zullen, zeker als het aantal componenten groter wordt dan twee, systematischer te werk moeten gaan om het rekenwerk te beperken.

Het blijkt mogelijk om iedere optische component met behulp van een tweedimensionale vierkante *matrix* te beschrijven. Wat een vierkante matrix is, hoe je zo'n matrix met een kolomvector kunt vermenigvuldigen en hoe je twee vierkante matrices met elkaar kunt vermenigvuldigen wordt in de volgende paragraaf besproken. Dit heb je nodig bij het uitvoeren van opdracht TN533. Veel meer details over matrices en hun eigenschappen krijg je in het wiskunde college Lineaire Algebra dat in het derde kwartiel gegeven wordt.

Wanneer je optische componenten beschreven hebt met behulp van een matrix dan blijkt het achter elkaar plaatsen van optische componenten neer te komen op het vermenigvuldigen van deze matrices. Als we ons beperken tot systemen waarbij de lichtbundel niet al te ver van de optische as van het systeem vandaan komt (men noemt dit *paraxiale voortplanting* van de lichtbundel, zie opdracht TN532), dan zijn de componenten van de matrices constanten en hebben we te maken met lineaire vergelijkingen.

Het doel van deze bijlage is het ontwikkelen van het bovengenoemde matrixformalisme. In paragraaf 11.3.3 beschrijven we de manier waarop je in dit formalisme een lichtstraal weergeeft. Vervolgens leiden we in paragraaf 11.3.4 tot en met 11.3.8 voor een aantal optische componenten de vorm van de matrix af en laten zien hoe we door het vermenigvuldigen van deze matrices de gang van een willekeurige lichtstraal door een optisch systeem kunnen berekenen. In de laatste paragrafen bekijken we onder welke voorwaarden er beeldvorming optreedt en bespreken als voorbeeld de beeldvorming bij een tweelenzenstelsel.

11.3.2 Matrices en matrix-vermenigvuldiging

Definitie vector en matrix

Een **vector v** in twee dimensies bestaan uit 2 elementen, die naast elkaar of onder elkaar kunnen worden gerangschikt. Ter onderscheid spreken we van **rij**vectoren en **kolom**vectoren:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(een rijvector)} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{(een kolomvector)}$$

Een rijvector kan met een kolomvector van dezelfde lengte worden vermenigvuldigd; men vermenigvuldigt dan elk element van de rijvector met elk element van de kolomvector, en telt de resultaten bij elkaar op. Het resultaat is dus een getal:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = 1 \cdot 6 + (-2) \cdot 4 = -2$$

Een **vierkante matrix** in twee dimensies bestaat uit vier, in een vierkant gerangschikte elementen, zoals A en B in het onderstaande voorbeeld:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{of:} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Door de matrix A op te vatten als twee onder elkaar geplaatste rijvectoren, kunnen we de matrix met een kolomvector vermenigvuldigen. Het resultaat is dan weer een kolom vector:

$$\mathrm{A} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot w_1 + a_{12} \cdot w_2 \\ a_{21} \cdot w_1 + a_{22} \cdot w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 \\ 0 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

En door de tweede matrix B op te vatten als twee naast elkaar geplaatste kolomvectoren kunnen we de matrix A met de matrix B vermenigvuldigen. Het resultaat is nu een vierkante matrix:

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}) & (a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22})\\ (a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}) & (a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2-3 & 1-6\\ 0+4 & 0+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -5\\ 4 & 8\end{bmatrix}$$

Oefening 1:
Bereken de volgende producten:

a. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1.5 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.3\\ 0.2\end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$

Matrices en Matlab
In Matlab kan op heel eenvoudige manier met matrices gerekend worden. Sterker nog: Matlab is eigenlijk ontwikkeld om met (numerieke) matrices te kunnen rekenen. Een matrix wordt in Matlab ingevoerd door de rijen een voor een in te typen en te scheiden door een puntkomma teken ';', bijvoorbeeld:

```
>>A=[ 1  2 ; 3  4 ]

A  =
        1     2
        3     4
```

Matrices vermenigvuldigen in Matlab gaat met de vermenigvuldigings operator '*':[3]

```
>>B=[ 4  3 ; 2  1 ];

>>C = A*B

C  =
        8     5
        20    13
```

Een kolomvector maak je in Matlab door de elementen niet te scheiden door een spatie of een komma maar door een puntkomma:

```
>>x=[ 6 ; 2 ];

>>y = A*x

y  =
```

[3] Dit is de reden dat voor puntsgewijze vermenigvuldiging van arrays in Matlab de operator '.*' moet worden gebruikt.

```
        10
        26
```

Oefening 2:

a. Bereken de matrices uit oefening 1 m.b.v. Matlab.
b. Bereken A .* B. Wat is het verschil met A * B?
c. Bereken z = x'. Bereken vervolgens x * z en z * x.

De kleine optica toolbox

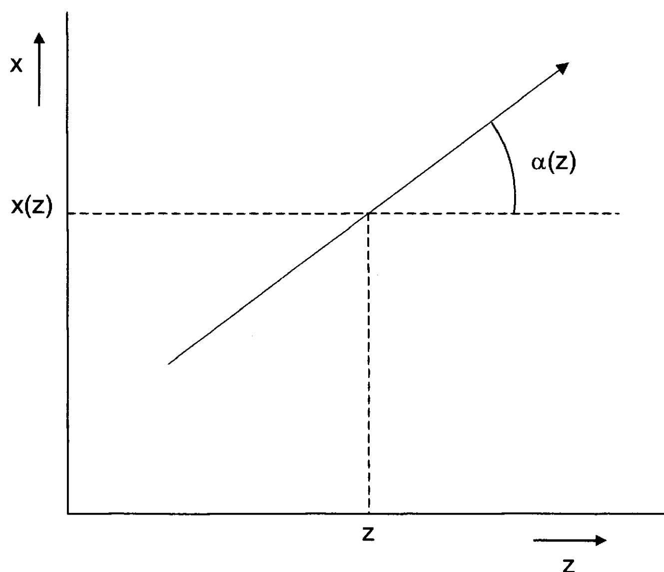
De kleine optica toolbox bevat m-functies voor het snel berekenen van de matrices die een rol spelen bij de geometrische optica. Bijvoorbeeld:

```
>> X_t ( 0.50 , 1.33 )          % Matrix voor verplaatsing over een afstand d=0,50 m door water
                                 % (brekingsindex n = 1,33)
ans  =
        1.0000      0
        0.3759      1.0000

>> X_f ( 0.20 )                  % Matrix voor breking door een dunne lens in lucht met brand-
                                 % puntsafstand f = 0.20 m
ans  =
        1     -5
        0      1
```

Type voor een overzicht van functies in de toolbox achter de Command Prompt in Matlab: help ino\optica.

11.3.3 Karakterisering van een lichtstraal; paraxiale voortplanting



Figuur 11.9: Karakterisering van een lichtstraal door de positie x(z) en de hellingshoek α(z).

We beschouwen in deze bijlage een optisch systeem, bestaande uit brekende en reflecterende sferisch gekromde oppervlakken met tussenruimtes, gepositioneerd langs de z-as van een assenstelsel.
We bekijken hier slechts paraxiale lichtstralen. Lichtstralen dus, die zich nooit ver van de optische as van het systeem verwijderen. De stralenvoortplanting kan dan tweedimensionaal beschreven worden. We kiezen een assenstelsel zodanig dat de z-as samenvalt met de optische as.
Op een willekeurige plaats z op de optische as kan iedere lichtstraal worden gekarakteriseerd door de *positie* $x(z)$ en de *hellingshoek* $\alpha(z)$ ten opzichte van de positieve z-as (zie figuur 1). Onder *paraxiaal* wordt verstaan dat men kleine afstanden x beschouwt en zodanig kleine hoeken gebruikt dat gesteld mag worden dat:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &\approx \alpha \\ \tan\alpha &\approx \alpha \end{aligned} \qquad (11.33)$$

α is dan uitgedrukt in radialen. Praktisch betekent dat dat de hoeken niet groter mogen zijn dan enkele graden.
In het te ontwikkelen matrixformalisme schrijven we deze twee coördinaten $x(z)$ en $\alpha(z)$ als een *vector*, waarbij het handig blijkt om de hellingshoek $\alpha(z)$ met de brekingsindex n van het medium te vermenigvuldigen. De lichtstraal op positie z wordt dan gekarakteriseerd door de vector:

$$\begin{bmatrix} n\alpha(z) \\ x(z) \end{bmatrix} \qquad (11.34)$$

Als een lichtstraal door een optische component (bijvoorbeeld een lens) heen gaat dan zal deze vector veranderen. Hierbij hangt de eindsituatie $(n_2\alpha_2, x_2)$ af van de optische component en de beginsituatie $(n_1\alpha_1, x_1)$:

$$\begin{aligned} n_2\alpha_2 &= A\cdot n_1\alpha_1 + B\cdot x_1 \\ x_2 &= C\cdot n_1\alpha_1 + D\cdot x_1 \end{aligned} \qquad (11.35)$$

In matrixnotatie wordt dit:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\cdot\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad met: \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad (11.36)$$

Onze taak in de volgende paragrafen is om te onderzoeken welke vorm de matrix **M** aanneemt voor verschillende optische componenten.

Tot slot maken we de volgende *tekenafspraken*:

1. *x is positief boven de z-as en negatief onder de z-as*
2. *Voor een naar rechts lopende bundel is α positief in het eerste kwadrant en negatief in het vierde kwadrant. Voor een naar links lopende bundel is α positief in het tweede kwadrant en negatief in het derde kwadrant.*

11.3.4 Vrije voortplanting door een medium

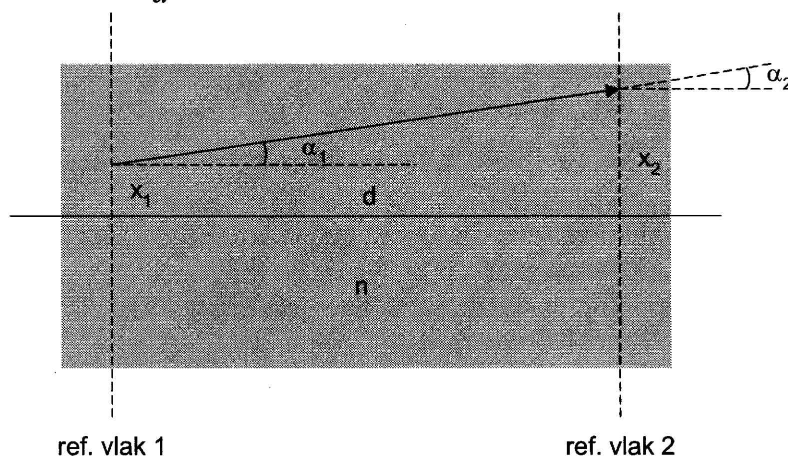
De eenvoudigste optische component die je kunt bedenken is een homogeen medium met brekingsindex n (bijvoorbeeld lucht of glas) waarin een lichtstraal een afstand d aflegt. (zie figuur 11.10) Nu en in de volgende paragrafen geven we de beginsituatie altijd aan met referentievlak 1 en de eindsituatie met referentievlak 2.

Het is duidelijk dat bij beide referentievlakken de hellingshoek van de lichtstraal gelijk is:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \tag{11.37}$$

Voor de hoogten x_2 en x_1 volgt:

$$\tan\alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{d} \tag{11.38}$$



Figuur 11.10 - Voortplanting van een straal door een medium met brekingsindex n.

Omdat in de paraxiale benadering geldt dat $\tan\alpha_1 \approx \alpha_1$, volgt hieruit dat:

$$x_2 = d\alpha_1 + x_1 \tag{11.39}$$

Deze resultaten kunnen in matrixvorm worden opgeschreven (beide referentievlakken liggen in het medium met brekingsindex n zodat n_1=n_2=n):

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.40}$$

Bovenstaande matrix wordt de afbeeldingsmatrix genoemd van een stukje medium. Merk op dat de determinant van bovenstaande matrix één is, iets wat bij alle afbeeldingsmatrices het geval zal blijken te zijn.

Conclusie:

De afbeeldingsmatrix voor de vrije voortplanting over een afstand *d* door een medium met brekingsindex *n* is:

$$\mathbf{M}_{\text{medium}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{bmatrix} \tag{11.41}$$

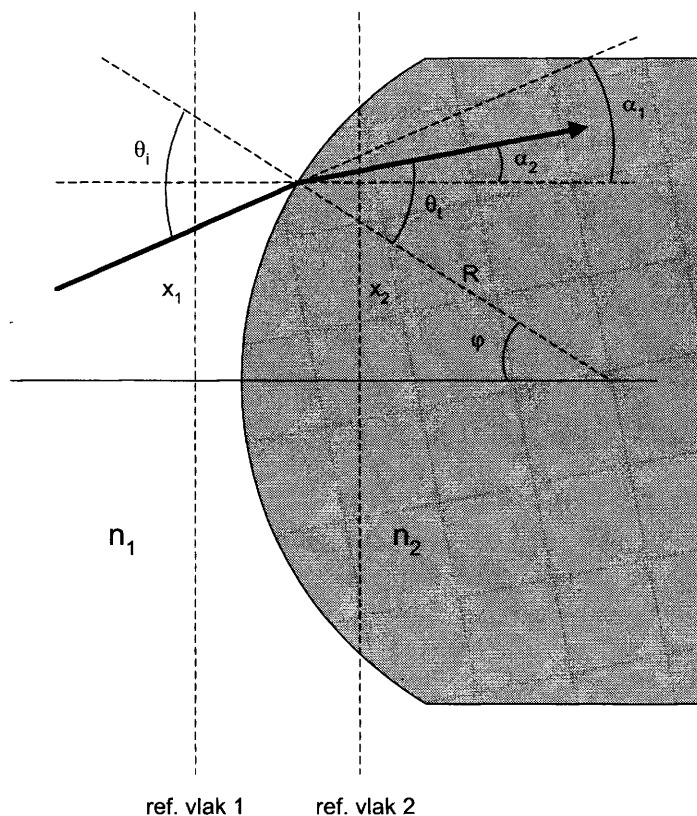
11.3.5 Breking aan een sferisch gekromd oppervlak

We beschouwen nu de stralengang door een gekromd grensvlak met kromtestraal R tussen twee media met brekingsindex n_1 en n_2 (zie figuur 11.11). De reden om zo'n soort oppervlak te beschouwen is dat lenzen uit twee van dit soort oppervlakten gemaakt zijn (zie paragraaf 11.3.6 en verder).

Voor gekromde brekende oppervlakken maken we de volgende *tekenafspraak*:

> *De kromtestraal is positief indien het kromtemiddelpunt rechts van het oppervlak ligt (een zogenaamd convex oppervlak) en negatief indien het kromtemiddelpunt links van het oppervlak ligt (een zogenaamd concaaf oppervlak).*

We zijn geïnteresseerd in de verandering van de stralengang t.g.v. het kromme grensvlak. Omdat we paraxiaal kijken kunnen we twee referentievlakken nemen, één op infinitesimale afstand voor het grensvlak en de ander op infinitesimale afstand er achter. Terwille van de duidelijkheid is de tekening niet paraxiaal gemaakt. De stralen zouden vlak langs de as moeten lopen zodat ook de referentievlakken dicht bij elkaar komen te liggen). We geven hoogte en helling van de straal op het referentievlak 1 aan met x_1 en α_1 en op referentievlak 2 met x_2 en α_2.



Figuur11.11 - Breking aan een sferisch gekromd oppervlak

Het verband tussen α_2 en α_1 kan gevonden worden uit de paraxiale wet van Snellius (waarvoor $\sin\theta \approx \theta$):

$$n_2\theta_t = n_1\theta_i \qquad (11.42)$$

en de (paraxiale) verbanden tussen de verschillende hoeken (zie figuur 11.11):

$$\alpha_2 = \theta_t - \varphi \tag{11.43}$$

$$\alpha_1 = \theta_i - \varphi \tag{11.44}$$

$$\varphi = \frac{x_1}{R} = \frac{x_2}{R} \tag{11.45}$$

omdat $\tan\varphi \approx \varphi$ in de paraxiale benadering.

Door elimineren van θ_i uit de vergelijkingen 11.43 en 11.44 volgt:

$$n_2\alpha_2 = n_1\alpha_1 - \frac{n_2 - n_1}{R}x_1 \tag{11.46}$$

In de paraxiale benadering liggen de referentievlakken vlak bij elkaar, zodat voor de hoogte geldt:

$$x_2 = x_1 \tag{11.47}$$

Dit kan in matrixnotatie worden opgeschreven als:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(n_2 - n_1)/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.48}$$

Bovenstaande matrix wordt de afbeeldingsmatrix van een sferisch gekromd brekend oppervlak genoemd. Merk op dat de determinant van bovenstaande matrix gelijk is aan één.

Conclusie:

De afbeeldingsmatrix voor een sferisch gekromd brekend oppervlak tussen twee media met brekingsindices n_1 en n_2 is:

$$\mathbf{M}_{\text{gekromd opp.}} = \begin{bmatrix} 1 & -(n_2 - n_1)/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.49}$$

11.3.6 De paraxiale afbeeldingsmatrix van een dunne lens

Met de afbeeldingsmatrices voor vrije voortplanting over een bepaalde afstand en breking aan een sferisch gekromd oppervlak hebben we de bouwstenen in handen om de afbeeldingsmatrices van de dunne en de dikke lens te kunnen berekenen. In deze paragraaf kijken we naar de dunne lens.

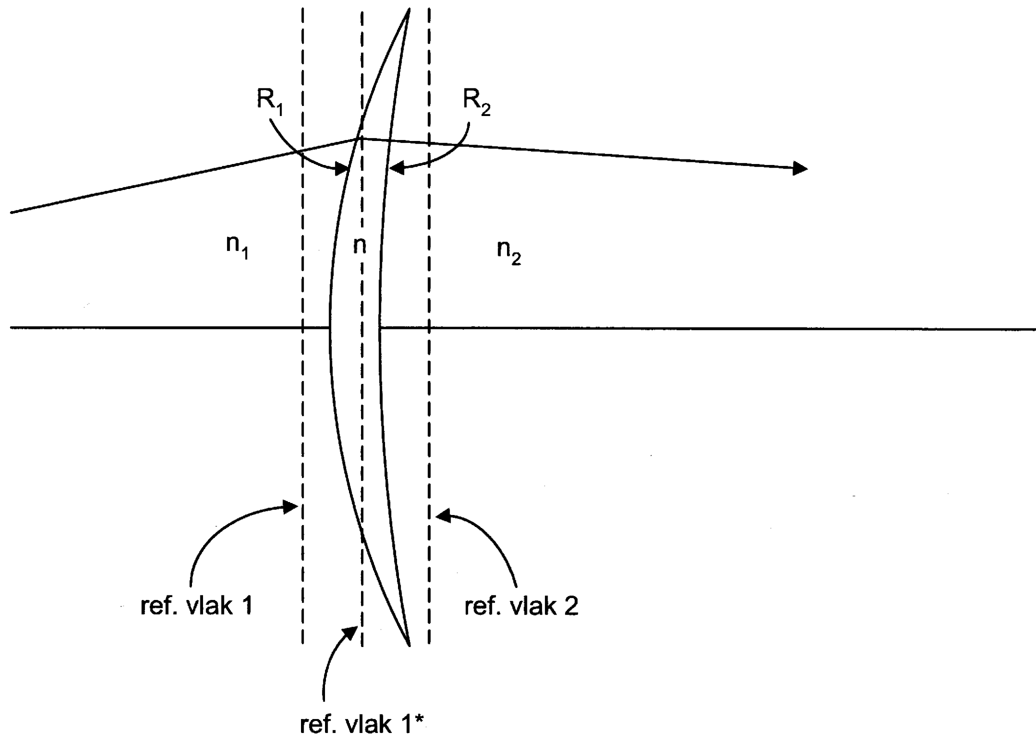
We beschouwen een lens, gemaakt van een materiaal met brekingsindex n met twee verschillende brekende oppervlakken met kromtestralen R_1 en R_2 (zie figuur 11.12). De brekingsindex links van de lens is n_1 en rechts van de lens n_2. Wordt de lens in lucht gebruikt dan zal dus gelden: $n_1 = n_2 = 1$. We nemen de lens zo dun dat de dikte ervan verwaarloosd mag worden d.w.z. infinitesimaal klein mag worden genomen.

Omdat een dunne lens gezien kan worden als twee sferisch gekromde brekende oppervlakken vlak achter elkaar ligt het voor de hand dat we de afbeeldingsmatrix van de dunne lens kunnen vinden door de afbeeldingsmatrices van het linker en het rechteroppervlak van de lens met elkaar te vermenigvuldigen. We zullen dit nu laten zien.

Omdat de lens als zeer dun mag worden beschouwd kan de stralengang worden bepaald door eerst de breking te beschouwen aan het eerste oppervlak, gaande van referentievlak 1 naar referentievlak 1* gevolgd door breking aan het tweede oppervlak, gaande van referentievlak 1* naar referentievlak 2. Voor het eerste oppervlak volgt met behulp van vergelijking 11.49:

$$\begin{bmatrix} n\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(n-n_1)/R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.50}$$

waarin de index van de hellingshoek en hoogte refereert aan het betreffende referentievlak.



Figuur 11.12 - Stralengang door een dunne lens

Voor het tweede oppervlak volgt analoog:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(n_2-n)/R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix} \tag{11.51}$$

Eliminatie van de vector $\begin{bmatrix} n\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix}$ in (11.50) en (11.51) geeft voor de stralengang door de dunne lens:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(n_2-n)/R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -(n-n_1)/R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.52}$$

Uit vergelijking 11.52 ziet men het grote voordeel van het gebruik van de paraxiale afbeeldingsmatrices: de afbeeldingsmatrix van de dunne lens kan worden verkregen door het vermenigvuldigen van de matrices van de twee optische basiselementen waaruit de dunne lens is opgebouwd. We zullen in de volgende paragrafen zien dat deze techniek algemeen geldig is voor alle lenzensystemen. Merk op dat de matrices in omgekeerde volgorde staan. Dit is belangrijk omdat matrices over het algemeen niet commuteren, wat wil zeggen dat de uitkomst van het product van twee matrices afhangt van de volgorde van de matrices. Uitvermenigvuldigen van de matrices geeft:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -P_{\text{dun}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.53}$$

waarin P_{dun} gegeven wordt door:

$$P_{\text{dun}} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n}{R_2} \tag{11.54}$$

Als de dunne lens in lucht staat zodat $n_1 = n_2 = 1$ volgt voor P_{dun}:

$$P_{\text{dun}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{11.55}$$

Dit is de beroemde lenzenmakers formule. P_{dun} wordt de *sterkte van de dunne lens* genoemd (we zullen in paragraaf 11.3.9 zien waarom),

Conclusie:

De afbeeldingsmatrix voor een dunne lens, gemaakt van een medium met brekingsindex *n* wordt gegeven door:

$$\mathbf{M}_{\text{dunne lens}} = \begin{bmatrix} 1 & -P_{\text{dun}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.56}$$

met:

$$P_{\text{dun}} = \left(\frac{(n-n_1)}{R_1} - \frac{(n-n_2)}{R_2}\right) \tag{11.57}$$

staat de lens in lucht dan geldt $n_1 = n_2 = 1$, en:

$$P_{\text{dun}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{11.58}$$

11.3.7 De afbeeldingsmatrix van een dikke lens

Een dikke lens is een lens waarvan de afstand die binnen in de lens wordt afgelegd niet verwaarloosd kan worden. Met behulp van de afbeeldingsmatrices (11.41) en (11.49) kunnen we de afbeeldingsmatrix van een dikke lens bepalen. Beschouw daartoe figuur 11.13. De lens kunnen we opgebouwd denken uit een sferisch brekend oppervlak met kromtestraal R_1, een stukje medium met dikte d en brekingsindex n en een sferisch brekend oppervlak het kromtestraal R_2. De matrix voor de stralengang tussen de referentievlakken 1 en 2 wordt verkregen

door vermenigvuldiging in omgekeerde volgorde van de drie basiselementen van de dikke lens:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n}{R_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d/n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{n - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.59}$$

Uitvermenigvuldigen van het matrixproduct geeft de volgende uitdrukkingen voor de elementen van de afbeeldingsmatrix:

$$A = 1 - \frac{n_2 - n}{n} \frac{d}{R_2} \tag{11.60}$$

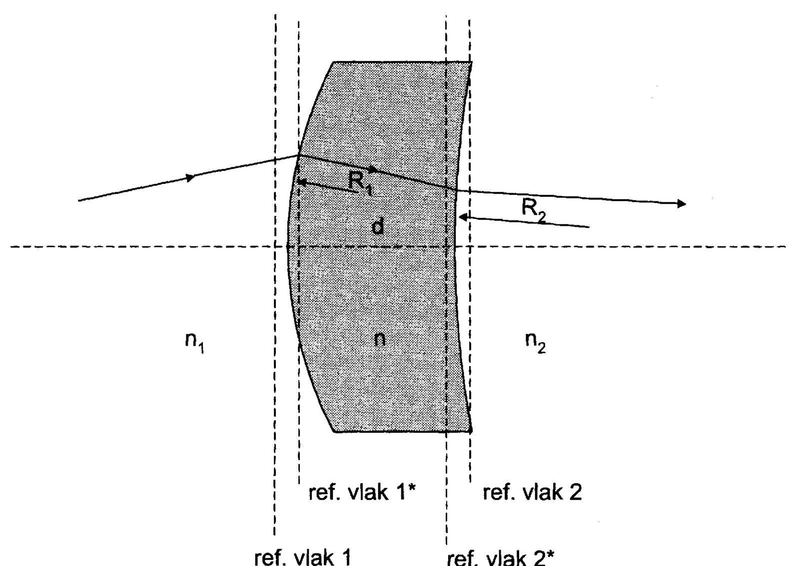
$$B = -\frac{n - n_1}{R_1} - \frac{n_2 - n}{R_2} + \frac{(n_2 - n)(n - n_1)}{n} \frac{d}{R_1 R_2} \tag{11.61}$$

$$C = \frac{d}{n} \tag{11.62}$$

$$D = 1 - \frac{n - n_1}{n} \frac{d}{R_1} \tag{11.63}$$

Als een dergelijke lens in lucht staat, zodat $n_1 = n_2 = 1$, dan wordt de afbeeldingsmatrix:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2} & -(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{R_1 R_2} \\ \frac{d}{n} & 1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1} \end{bmatrix} \tag{11.64}$$



Figuur11.13 - Voortplanting van een lichtstraal door een dikke lens

Omdat de determinant van een matrix gegeven wordt door het product van de determinanten van de deelmatrices waaruit de matrix is opgebouwd is ook de determinant van de matrix van een dikke lens één, hetgeen door berekening geverifieerd kan worden.

Het rechterboven element van de matrix wordt analoog aan de dunne lens de sterkte, P_{dik}, van de dikke lens genoemd:

$$P_{\text{dik}} = \frac{n-n_1}{R_1} + \frac{n_2-n}{R_2} - \frac{(n_2-n)(n-n_1)}{n}\frac{d}{R_1R_2} \qquad (11.65)$$

Staat de lens in lucht, dan wordt P_{dik}:

$$P_{\text{dik}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{R_1R_2} \qquad (11.66)$$

Conclusie:

De afbeeldingsmatrix voor een dikke lens in <u>lucht</u>, gemaakt van een medium met brekingsindex *n* wordt gegeven door:

$$\mathbf{M}_{\text{dikke lens}} = \begin{bmatrix} 1+\frac{n-1}{n}\frac{d}{R_2} & -P_{\text{dik}} \\ \frac{d}{n} & 1-\frac{n-1}{n}\frac{d}{R_1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(11.67)}$$

met:

$$P_{\text{dik}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{R_1R_2} \qquad \mathbf{(11.68)}$$

11.3.8 Reflectie aan een sferisch gekromde spiegel

Als laatste optische component behandelen we de reflectie aan een sferisch gekromde spiegel. Gekromde spiegels worden bijvoorbeeld veel in astronomische kijkers toegepast. In het limietgeval van een oneindig grote kromtestraal, vinden we bovendien de afbeeldingsmatrix van een vlakke spiegel. Bij een spiegel maken we de volgende *tekenafspraak*:

De kromtestraal R van een spiegel is positief als een evenwijdige lichtbundel wordt geconvergeerd en negatief als deze wordt gedivergeerd.

We nemen nu twee referentievlakken net voor en net na reflectie (zie figuur 11.14).

Uit de reflectiewet:

$$\theta_i = \theta_r \qquad (11.69)$$

en de relaties tussen de hoeken:

$$\alpha_1 = \theta_i + \varphi$$

$$\alpha_2 = \theta_r - \varphi \qquad (11.70)$$

$$\tan\varphi = \frac{x_1}{R} = \frac{x_2}{R} \approx \varphi$$

volgt dat:

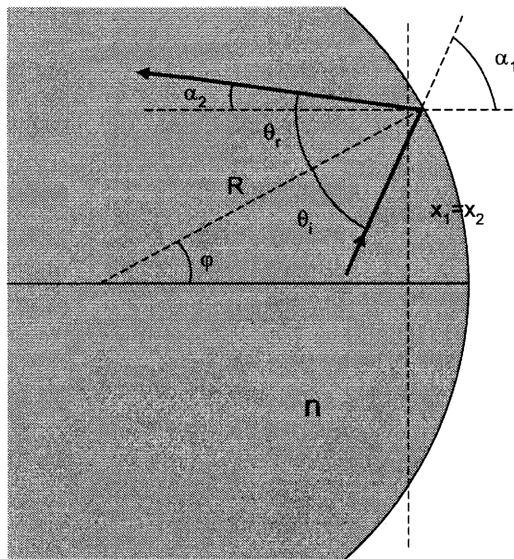
$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{2x_1}{R} \tag{11.71}$$

Ook geldt:

$$x_2 = x_1 \tag{11.72}$$

Ofwel in matrixnotatie (ook hier geldt $n_1 = n_2 = n$):

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.73}$$



Figuur11.14 - Reflectie aan een sferisch gekromd oppervlak.

Bovenstaande matrix wordt de afbeeldingsmatrix genoemd van een sferisch gekromde spiegel. Merk op dat de determinant van bovenstaande matrix één is.
In de limiet dat R oneindig groot wordt vinden we de afbeeldingsmatrix voor een vlakke spiegel:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.74}$$

De afbeeldingsmatrix voor een vlakke spiegel is dus de eenheidsmatrix.

Conclusie:
De afbeeldingsmatrix voor een sferisch gekromde spiegel met kromtestraal R in een medium met brekingsindex n is:

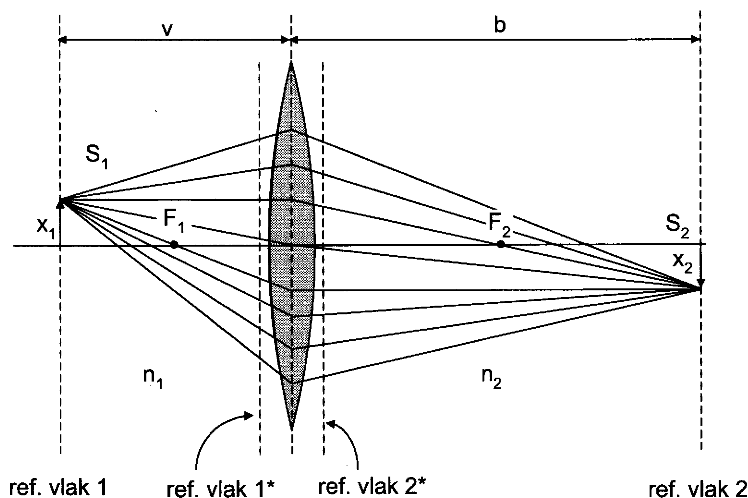
$$\mathbf{M}_{\text{gekromde spiegel}} = \begin{bmatrix} 1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.75}$$

De afbeeldingsmatrix voor een vlakke spiegel is de eenheidsmatrix:

$$\mathbf{M}_{\text{vlakke spiegel}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.76)$$

11.3.9 Beeldvorming door een dunne lens

In deze paragraaf gaan we bekijken onder welke voorwaarden een voorwerp dat een afstand v voor de lens wordt geplaatst een beeld veroorzaakt in een punt gelegen op een afstand b aan de andere kant van de lens (zie figuur 11.15).



Figuur 11.15 - Afbeelding van een punt, S_1 door middel van een dunne lens

Natuurlijk wordt deze situatie beschreven door de *lenzenformule*:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (11.77)$$

We zullen in deze paragraaf zien dat dit resultaat ook met behulp van afbeeldingsmatrices af te leiden is. In de volgende paragrafen zullen we dit resultaat bovendien generaliseren voor ingewikkeldere systemen.

We willen de afbeelding bepalen van een voorwerpspunt S_1 dat zich op een afstand v voor de lens met een hoogte x_1 boven de as bevindt (zie figuur 11.15).
Stel het beeldpunt is S_2 en ligt op een afstand b achter de lens op een hoogte x_2 boven de as (in de figuur is x_2 dus negatief getekend). S_2 is dan en slechts dan een beeldpunt als alle stralen die vanuit S_1 vertrekken aankomen in S_2. We nemen v en x_1 vast (die definiëren het punt S_1) en nemen α_1 variabel en gaan nu kijken of er een punt S_2 (bepaald door b en x_2) te vinden is dat onafhankelijk is van α_1. Als dat het geval is, dan komt immers iedere lichtstraal uit S_1, onafhankelijk van onder welke hoek α_1 hij vertrekt, aan in S_2!

De stralengang van S_1 naar het nog te bepalen punt S_2 wordt gegeven door de voortplanting door het stukje medium tussen de referentievlakken 1 en 1^* waarvoor geldt:

$$\begin{bmatrix} n_1\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.78}$$

gevolgd door de dunne lens die zich tussen de referentievlakken 1^* en 2^* bevindt (de afstand tussen deze referentievlakken is verwaarloosbaar klein) waarvoor geldt:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_{2*} \\ x_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -P_{\text{dun}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix} \tag{11.79}$$

waarna het stukje medium tussen de referentievlakken 2^* en 2 volgt waarvoor geldt:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{b}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_2\alpha_{2*} \\ x_{2*} \end{bmatrix} \tag{11.80}$$

Eliminatie van de vectoren $\begin{bmatrix} n_1\alpha_{1*} \\ x_{1*} \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} n_2\alpha_{2*} \\ x_{2*} \end{bmatrix}$ geeft de volgende relatie voor de stralengang van S_1 naar S_2:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{b}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -P_{\text{dun}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{v}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.81}$$

Uitvermenigvuldigen geeft:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-\dfrac{vP_{\text{dun}}}{n_1} & -P_{\text{dun}} \\ \dfrac{v}{n_1}+\dfrac{b}{n_2}-\dfrac{vbP_{\text{dun}}}{n_1 n_2} & 1-\dfrac{bP_{\text{dun}}}{n_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{M'} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.82}$$

De matrix **M'** met elementen A', B', C' en D' zullen we de *beeldvormingsmatrix* van de dunne lens noemen. De beeldvormingsmatrix van de dunne lens beschrijft wat de lens doet met lichtstralen die afkomstig zijn van een voorwerp dat zich op een afstand v voor de lens bevindt. We benadrukken het verschil tussen de beeldvormingsmatrix en de *afbeeldingsmatrix* (11.56) van de dunne lens, die beschrijft hoe een lichtstraal die op één van de lensoppervlakken invalt er aan de andere kant weer uitkomt.

Uitschrijven van de tweede vergelijking van (11.82) geeft:

$$x_2 = \left(\frac{v}{n_1} + \frac{b}{n_2} - \frac{vbP_{\text{dun}}}{n_1 n_2} \right) \cdot n_1 \alpha_1 + \left(1 - \frac{bP_{\text{dun}}}{n_2} \right) \cdot x_1 \qquad (11.83)$$

x_2 is slechts dan onafhankelijk van α_1 als de coëfficiënt van α_1 nul is. Met andere woorden: als het element C' van de matrix uit (11.82) nul is:

$$\frac{v}{n_1} + \frac{b}{n_2} - \frac{vbP_{\text{dun}}}{n_1 n_2} = 0 \qquad (11.84)$$

ofwel, iets anders opgeschreven:

$$\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{v} = P_{\text{dun}} \qquad (11.85)$$

Dit is de (algemene) *lenzenformule* voor een dunne lens.

Als een bundel evenwijdige stralen invalt op de lens (dit betekent $v=\infty$) dan worden de stralen gefocusseerd in het zogenaamde *secundaire brandpunt* gegeven door $f_{\text{dun,sec}}$:

$$f_{\text{dun,sec}} = \frac{n_2}{P_{\text{dun}}} \qquad (11.86)$$

Het is nu ook duidelijk waarom P_{dun} de sterkte van de lens wordt genoemd: hoe groter P_{dun} des te sterker worden de stralen gefocusseerd.
Als een bundel evenwijdige stralen de lens verlaat (dit betekent $b=\infty$), is ze vertrokken uit het zogenaamde *primaire brandpunt* gegeven door $f_{\text{dun,prim}}$:

$$f_{\text{dun,prim}} = \frac{n_1}{P_{\text{dun}}} \qquad (11.87)$$

Het primaire en het secundaire brandpunt liggen alleen dan niet even ver van de lens als zich aan beide zijden van de lens een verschillend medium bevindt. Merk op dat de brandpuntsafstand van de dunne lens gegeven wordt door het element B van de afbeeldingsmatrix van de dunne lens via:

$$\frac{n_1}{f_{\text{dun,prim}}} = \frac{n_2}{f_{\text{dun,sec}}} = P_{\text{dun}} = -B \qquad (11.88)$$

Vandaar dat in paragraaf 11.3.6 de grootheid $P_{\text{dun}} = -B$ de *sterkte van de dunne lens* is genoemd.
De vergroting V is gelijk aan de verhouding tussen de grootte van het beeld en het voorwerp: $V = x_2/x_1$. De voorwaarde dat x_2 de afbeelding van x_1 is, betekent dat de coëfficiënt van α_1 in de vergelijking (11.83). nul is. De vergroting V wordt dus bepaald door het element D' van de beeldvormingsmatrix (11.82):

$$V = (1 - \frac{bP_{\text{dun}}}{n_2}) = -\frac{b}{v}\frac{n_1}{n_2} \qquad (11.89)$$

Bij bij een positieve lens met v groter dan $f_{\text{dun,prim}}$ is b positief. De vergroting is dan, vanwege het minteken, negatief zodat een voorwerpspunt boven de as wordt afgebeeld onder de as (dat wil zeggen dat beeld omgekeerd staat). Als v juist kleiner is dan $f_{\text{dun,prim}}$ is b negatief en bevindt het beeld zich dus aan dezelfde zijde van de lens als het voorwerp. Het beeld is dan dus virtueel en de vergroting V positief.

In verreweg de meest voorkomende gevallen zal de lens zich aan weerszijden in lucht bevinden, zodat $n_1=n_2=1$. In lucht is er geen verschil meer tussen de primaire en de secundaire brandpuntsafstand:

$$P_{\text{dun}} = \frac{1}{f_{\text{dun}}} \qquad (11.90)$$

En de *lenzenformule* (11.85) voor een dunne lens, krijgt dan de bekende vorm:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_{\text{dun}}} \qquad (11.91)$$

Voor de vergroting V vinden we in lucht:

$$V = (1 - bP_{\text{dun}}) = -\frac{b}{v} \qquad (11.92)$$

Samenvatting:
De beeldvorming bij een dunne lens wordt beschreven door de *beeldvormingsmatrix* M':

$$\mathbf{M'} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{vP_{\text{dun}}}{n_1} & -P_{\text{dun}} \\ \frac{v}{n_1} + \frac{b}{n_2} - \frac{vbP_{\text{dun}}}{n_1 n_2} & 1 - \frac{bP_{\text{dun}}}{n_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(11.93)}$$

Beeldvorming treedt op als het element C' van deze matrix gelijk is aan nul. Dan is:

$$\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{v} = P_{\text{dun}} \qquad \mathbf{(11.94)}$$

Hierin is:

$$P_{\text{dun}} = \frac{n_1}{f_{\text{dun,prim}}} = \frac{n_2}{f_{\text{dun,sec}}} \qquad \mathbf{(11.95)}$$

De vergroting V wordt gegeven door het element D' van de matrix:

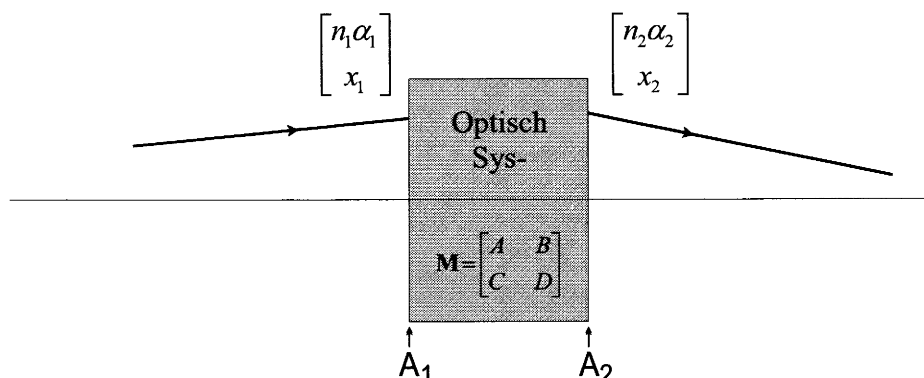
$$V = (1 - \frac{bP_{\text{dun}}}{n_2}) = -\frac{b}{v}\frac{n_1}{n_2} \qquad \mathbf{(11.96)}$$

11.3.10 Hoofdvlakken en brandpunten bij een willekeurig optisch systeem

In de vorige paragraaf hebben we gezien hoe we met afbeeldingsmatrices de beeldvorming bij een dunne lens kunnen beschrijven.
In deze en de volgende twee paragrafen bekijken we de beeldvorming voor een willekeurig paraxiaal optisch systeem met bekende afbeeldingsmatrix **M**. Hiervoor is het noodzakelijk de begrippen *hoofdvlak* en *apexvlak* (*apexpunt*) te introduceren.

De apexvlakken van een optisch systeem

Stel we hebben de beschikking over een optisch systeem dat we met behulp van een afbeeldingsmatrix **M** kunnen beschrijven. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een dikke lens, of een tweelenzensysteem bestaande uit twee dunne lenzen die op een afstand d van elkaar geplaatst



Figuur 11.16 - Ligging van de apexvlakken A_1 en A_2 van een optisch systeem

zijn.
De twee *apexvlakken* A_1 en A_2 van het systeem zijn de twee begrenzingsvlakken (zijkanten) van het systeem. De matrix **M** beschrijft dan hoe een lichtstraal die op één van de apexvlakken van het systeem invalt er aan de andere kant weer uitkomt (zie figuur 11.16). (De ligging van de apexvlakken wordt dus eigenlijk door de matrix M bepaald.)

Als de vector $(n_1\alpha_1, x_1)$ de lichtstraal op het linker apexvlak A_1 representeert, dan geldt dus voor de lichtstraal $(n_2\alpha_2, x_2)$ op het rechter apexvlak A_2:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.97}$$

Een voorbeeld: bij een tweelenzensysteem vormen de vlakken waarin de twee (dunne) lenzen liggen de apexvlakken.

De hoofdvlakken van een optisch systeem

Als we van beide zijden een evenwijdige lichtbundel evenwijdig met de hoofdas op het systeem laten invallen kunnen we de ligging van het primaire en het secundaire brandpunt F_1 en F_2 bepalen (zie figuur 11.17a en 11.17b).
Vervolgens zoeken we, door extrapolatie van de lichtstralen van zowel de binnenkomende als de uitgaande lichtbundel, de plaats waar we een dunne lens met geschikte brandpuntsafstand zouden moeten neerzetten om hetzelfde effect te bereiken. Deze plaats noemen we een *hoofdvlak* van het optisch systeem (zie figuur 11.17c en 11.17d). Ieder optisch systeem heeft twee hoofdvlakken: een primair hoofdvlak H_1 dat hoort bij het primaire brandpunt F_1 en een secundair hoofdvlak H_2 horend bij het secundaire brandpunt F_2. Zoals in figuur 11.17 te zien is, kan het hoofdvlak zowel

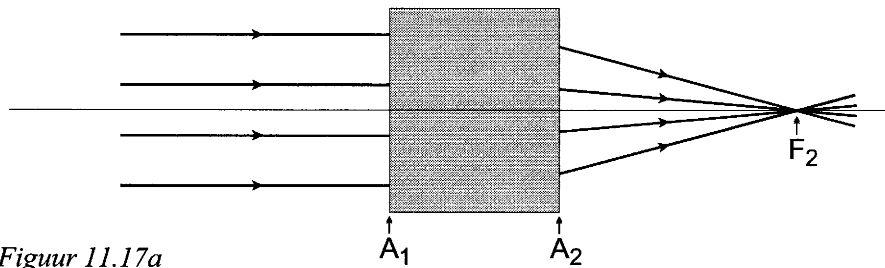
binnen als buiten het optische systeem liggen. Het is zelfs zo dat het primaire hoofdvlak niet altijd links van het secundaire hoofdvlak hoeft te liggen (wat in figuur 11.17 wel het geval is).
Het nut van de hoofdvlakken van een optisch systeem wordt gegeven door de volgende stelling:

Bij een willekeurig optisch systeem kan, bij gegeven voorwerpsafstand v, de beeldpuntsafstand b gevonden worden met behulp van de ***lenzenformule****:*

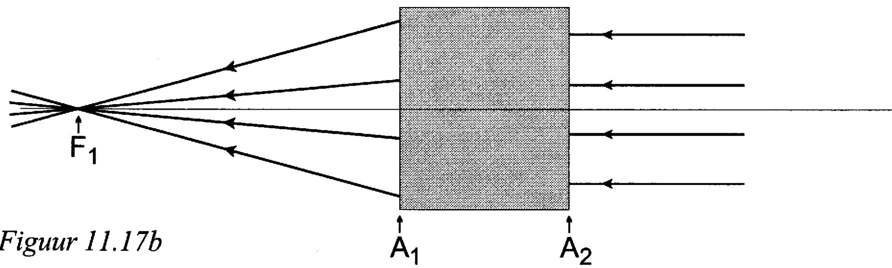
$$\frac{n_2}{b}+\frac{n_1}{v}=P$$

mits als voorwerpsafstand wordt genomen de afstand van het voorwerp tot het eerste hoofdvlak H_1, als beeldafstand de afstand van het tweede hoofdvlak H_2 tot het beeld. De ***sterkte*** *P van het systeem is dan gelijk aan –B, waarin B het tweede element van e afbeeldingsmatrix van het systeem voorstelt (zie figuur11.18).*
De ***primaire en secundaire brandpuntsafstand*** *f_{prim} en f_{sec} worden dan gegeven door $f_{prim}=-n_1/B$ en $f_{sec}=-n_2/B$.*

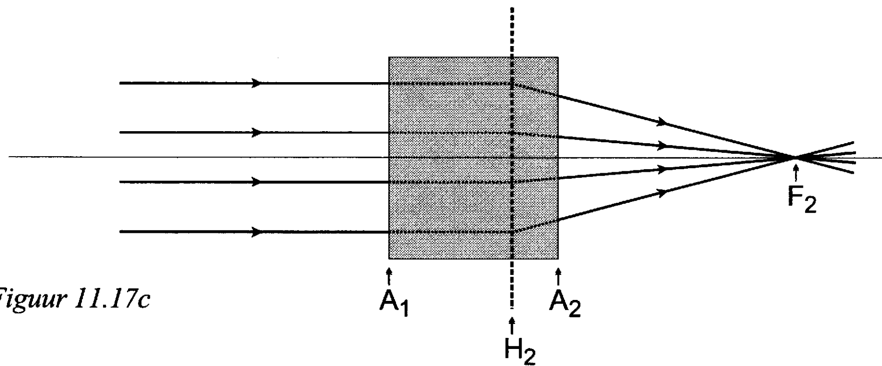
Als we de primaire en de secundaire brandpuntsafstand en de ligging van de hoofdvlakken kennen, kunnen we ieder willekeurig optisch systeem dus net zo analyseren als een enkele dunne lens!
In de volgende paragrafen zullen we deze stelling bewijzen en bovendien uitdrukkingen voor de ligging van de hoofdvlakken ten opzichte van de apexvlakken vinden. Om niet meteen naar het hoogste abstractieniveau te gaan behandelen we eerst de dikke lens als voorbeeld, om ons daarna te wenden tot een willekeurig optisch systeem.



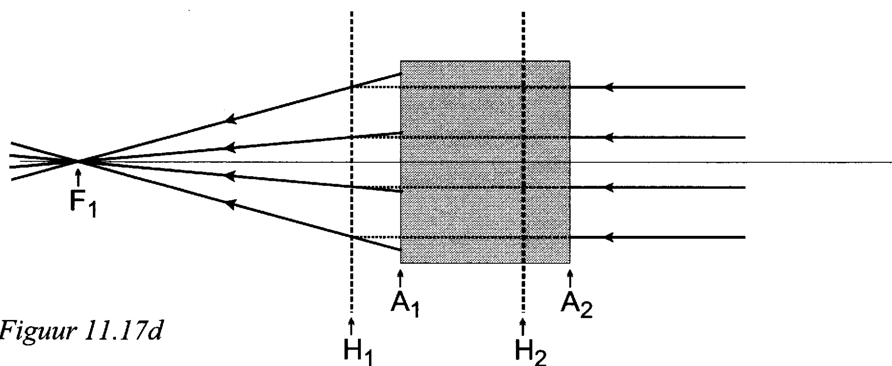
Figuur 11.17a



Figuur 11.17b



Figuur 11.17c

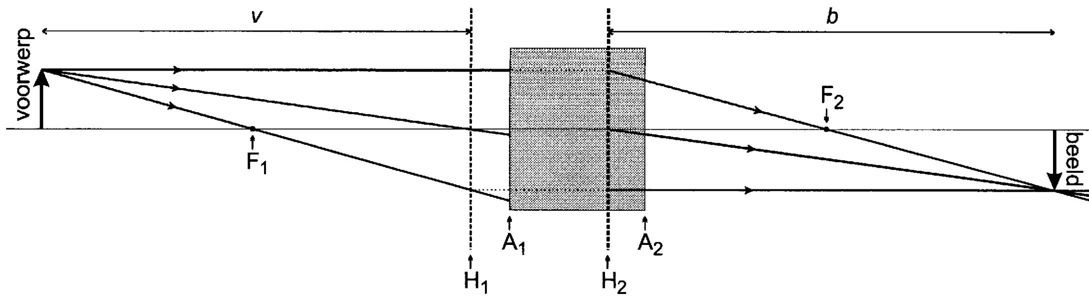


Figuur 11.17d

Figuur 11.17 - Ligging van de hoofdvlakken H_1 en H_2 van een optisch systeem

11.3.11 Beeldvorming door een dikke lens

In deze paragraaf bekijken we beeldvorming bij een dikke lens. In overeenstemming met de in de vorige paragraaf besproken theorie zullen we eerst de positie van de hoofdvlakken en de brandpunten ten opzichte van de apexvlakken gaan bepalen, om vervolgens te laten zien dat de lenzenformule opgaat als we v en b ten opzichte van de hoofdvlakken definiëren.



Figuur 11.18 - Beeldvorming bij een willekeurig optisch systeem

Positie van de hoofdvlakken, brandpuntsafstand

Voor het bepalen van de ligging van het secundaire hoofdvlak H_2 beschouwen we de stralengang van evenwijdig inkomend licht zoals te zien in figuur 11.19a. De afstand tussen het apexvlak A_2 (juist buiten de lens) en het brandpunt F_2 noemen we s_2.

De stralengang vanaf het apexpunt A_1 tot het brandpunt F_2 wordt gegeven door de afbeeldingsmatrix die hoort bij de verplaatsing over een afstand s_2 te vermenigvuldigen met de afbeeldingsmatrix van de dikke lens:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2} & -P_{\text{dik}} \\ \frac{d}{n} & 1-\frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2} & -P_{\text{dik}} \\ \frac{d}{n}+\frac{s_2}{n_2}\left(1+\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2}\right) & 1-\frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1}-\frac{s_2 P_{\text{dik}}}{n_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{11.98}$$

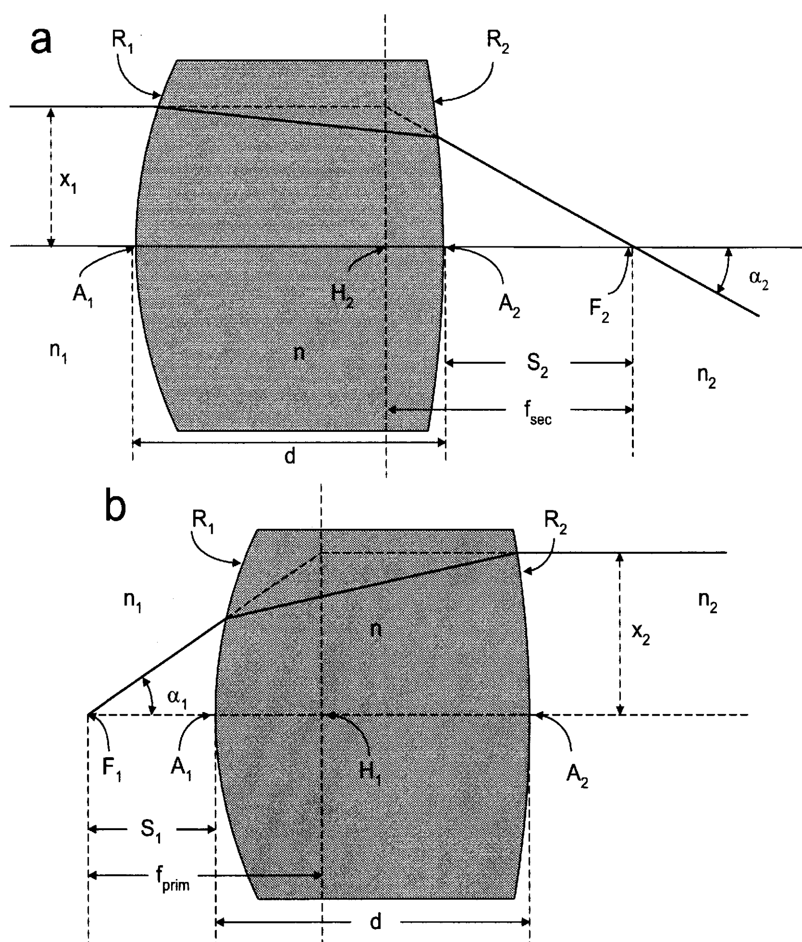
Het secundaire hoofdvlak H_2 wordt gedefinieerd door het snijpunt van de inkomende evenwijdige straal en de uittredende straal. Uit de figuur zien we dat dezelfde afbeelding wordt verkregen als op de positie H_2 een dunne lens zou hebben gestaan met secundaire brandpuntsafstand H_2F_2. Het ligt daarom voor de hand om de secundaire brandpuntsafstand van de dikke lens te definiëren als de afstand tussen het secundaire hoofdvlak H_2 en het secundaire brandpunt F_2. Uit figuur 11.19a is te zien dat deze secundaire brandpuntsafstand volgt uit[4]:

$$\frac{x_1}{f_{\text{dik,sec}}} = \tan(-\alpha_2) \approx -\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad n_2\alpha_2 = -\frac{n_2}{f_{\text{dik,sec}}} \cdot x_1 \tag{11.99}$$

Omdat voor evenwijdig invallende stralen moet gelden dat $\alpha_1=0$ zien we uit de bovenste vergelijking van (11.98) dat:

$$n_2\alpha_2 = -P_{dik} \cdot x_1 \tag{11.100}$$

[4] merk op dat, met de tekendefinities uit paragraaf 11.3.3, α_2 negatief is. Vandaar het minteken in vergelijking (11.99)



Figuur 11.19 - Definitie van hoofdvlakken voor een dikke lens

Door vergelijking (11.99) en (11.100) te vergelijken vinden we dat het secundaire brandpunt gegeven wordt door:

$$\mathrm{H_2F_2} = f_{\mathrm{dik,sec}} = \frac{n_2}{P_{\mathrm{dik}}} \tag{11.101}$$

Hierbij hebben we impliciet al gebruik gemaakt van de volgende *tekenafspraak*:

> *De afstand* AB *noemen we positief als het punt* B *rechts van* A *ligt, en negatief als* B *links van* A *ligt. Bijgevolg is:*
> AB = – BA

De plaats van het hoofdvlak ten opzichte van het apexvlak is uit de tweede vergelijking van (11.98) te vinden. Als we weer gebruiken dat voor evenwijdig met de hoofdas invallende stralen moet gelden dat α_1=0:

$$x_2 = \left(1 - \frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1} - \frac{s_2 P_{\mathrm{dik}}}{n_2}\right) x_1 \tag{11.102}$$

Omdat alle evenwijdig met de hoofdas op de lens invallende stralen door het brandpunt F_2 gaan, moet x_2 gelijk zijn aan nul en bovendien onafhankelijk zijn van de invalshoogte x_1. Uit vergelijking (11.102) zien we dat dit het geval is als:

$$\frac{s_2 P_{\text{dik}}}{n_2} = \left(1 - \frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1}\right) \quad \Rightarrow \quad s_2 = \left(1 - \frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1}\right)\cdot\frac{n_2}{P_{\text{dik}}} \tag{11.103}$$

Voor de afstand van het apexvlak A_2 tot het hoofdvlak H_2 vinden we uit vergelijking (11.103) en (11.101):

$$\text{A}_2\text{H}_2 = s_2 - \text{H}_2\text{F}_2 = -\frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1}\frac{n_2}{P_{\text{dik}}} \tag{11.104}$$

Op volledig analoge wijze kan met behulp van figuur 11.19b de ligging van het primaire hoofdvlak H_1 worden gedefinieerd door het snijpunt van de straal die door het primaire brandpunt F_1 gaat en de evenwijdig uittredende straal. We zouden hiervoor de voor het secundaire hoofdvlak gevolgde procedure kunnen omdraaien en de afbeeldingsmatrix van de dikke lens te vermenigvuldigen met de afbeeldingsmatrix die hoort bij de verplaatsing over een afstand s_2. We kunnen de benodigde informatie echter ook direct uit de eerste vergelijking van (11.98) verkrijgen:

$$n_2\alpha_2 = \left(1 + \frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2}\right)n_1\alpha_1 \; - \; P_{\text{dik}}x_1 \tag{11.105}$$

Als we gebruiken dat $\alpha_2=0$ en (zie figuur 11.19b):

$$\frac{x_1}{s_1} = \tan\alpha_1 \approx \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = s_1\alpha_1 \tag{11.106}$$

dan vinden we uit vergelijking (11.105):

$$\frac{s_1 P_{dik}}{n_1} = 1 + \frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2} \tag{11.107}$$

Hierbij hebben we ook gebruikt dat vergelijking (11.105) voor iedere α_1 moet gelden.

Voor de primaire brandpuntsafstand F_1H_1 vinden we uit de tweede vergelijking van (11.98) na eliminatie van x_1 met behulp van de eerste vergelijking van (11.98) en met gebruikmaking van de uitdrukking $f_{\text{dik,prim}}=x_2/\alpha_1$:

$$f_{\text{dik,prim}} = \text{F}_1\text{H}_1 = \frac{n_1}{P_{\text{dik}}} \tag{11.108}$$

en de positie van het primaire hoofdvlak A_1H_1:

$$\mathrm{A_1H_1} = \mathrm{F_1H_1} - s_1 = -\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2}\frac{n_1}{P_{\mathrm{dik}}} \tag{11.109}$$

Beeldvorming; definitie voorwerps- en beeldafstand

De beeldvormingsmatrix **M'** horend bij de afbeelding van een willekeurig voorwerpspunt op afstand s_1 voor het eerste lensoppervlak met hoogte x_1 boven de as kan, net als bij de dunne lens, bepaald worden door vermenigvuldiging van de volgende drie matrices:

$$\mathbf{M'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2} & -P_{dik} \\ \frac{d}{n} & 1-\frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \tag{11.110}$$

waarin s_2 de afstand is van het laatste lensoppervlak tot het beeldpunt.
Door nulstellen van het element C' uit de beeldvormingsmatrix **M'** vinden we, net als bij de dunne lens, de *voorwaarde voor beeldvorming*:

$$\frac{s_1}{n_1}\left(1-\frac{n-n_1}{n}\frac{d}{R_1}-\frac{s_2 P_{dik}}{n_2}\right) + \frac{d}{n} + \frac{s_2}{n_2}\left(1+\frac{n-n_2}{n}\frac{d}{R_2}\right) = 0 \tag{11.111}$$

Deze relatie kan worden omgevormd indien we de voorwerpsafstand v definiëren als de afstand van het voorwerp tot het primaire hoofdvlak:

$$v \equiv s_1 + \mathrm{A_1H_1} \tag{11.112}$$

en de beeldafstand b als de afstand van het secundaire hoofdvlak tot het beeld:

$$b \equiv s_2 + \mathrm{H_2A_2} \tag{11.113}$$

Substitutie van s_1 en s_2 uit (11.112) en (11.113) in (11.111) en gebruikmaking van (11.104) en (11.109) geeft na enige manipulaties:

$$\frac{v}{n_1} + \frac{b}{n_2} - \frac{vbP_{dik}}{n_1 n_2} = 0 \tag{11.114}$$

ofwel:

$$\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{v} = P_{dik} \tag{11.115}$$

De primaire en secundaire brandpuntsafstanden worden weer gegeven door:

$$\frac{n_1}{f_{dik,prim}} = \frac{n_2}{f_{dik,\mathrm{sec}}} = P_{dik} \tag{11.116}$$

Men kan ook af leiden dat de vergroting V net als bij de dunne lens gegeven wordt door:

$$V = -\frac{b}{v}\frac{n_1}{n_2} \qquad (11.117)$$

Samenvatting:
Bij een dikke lens kan de beeldpuntsafstand gevonden worden bij gegeven voorwerpsafstand met behulp van de eenvoudige dunne lens afbeeldingsformule:

$$\frac{n_2}{b} + \frac{n_1}{v} = P_{dik} \qquad (11.115)$$

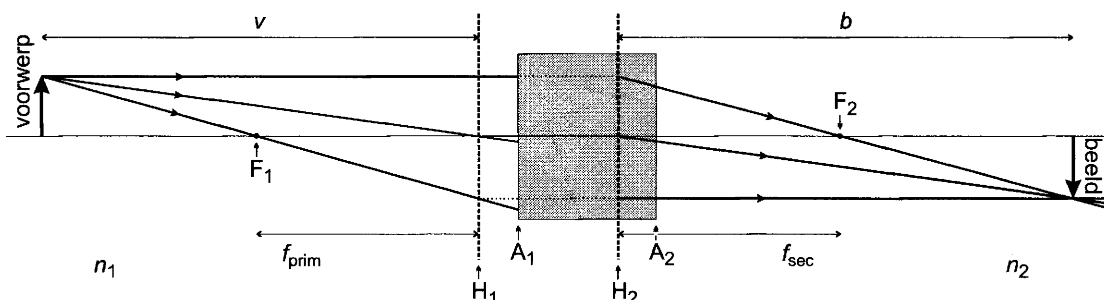
mits als voorwerpsafstand v de afstand van het voorwerp tot het eerste hoofdvlak wordt genomen, en als beeldafstand b de afstand van het tweede hoofdvlak tot het beeld.
De sterkte P_{dik} van de dikke lens is hier gelijk aan –B, waarin B het tweede element van de afbeeldingsmatrix van de dikke lens is.
De primaire en secundaire brandpuntsafstand f_{prim} en f_{sec} worden gegeven door $f_{prim}=-n_1/B$ en $f_{sec}=-n_2/B$.

11.3.12 Beeldvorming door een willekeurig optisch systeem

Uitgaande van de theorie zoals ontwikkeld in de voorgaande paragrafen kunnen we nu een algemene procedure formuleren voor de beeldvorming bij een *willekeurig* optisch systeem.

Neem een willekeurig optisch systeem ingebed links in een medium met brekingsindex n_1 en rechts in een medium met brekingsindex n_2 (zie figuur 11.20). Dit systeem is opgebouwd uit stukken medium, sferisch brekende en sferisch reflecterende oppervlakken. De afbeeldingsmatrix **M** van het systeem kan worden gevonden door vermenigvuldiging in omgekeerde volgorde van alle aanwezige deel-afbeeldingsmatrices:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(n)} \cdot \mathbf{M}^{(n-1)} \cdot ...... \cdot \mathbf{M}^{(2)} \cdot \mathbf{M}^{(1)} \qquad (11.117)$$



Figuur 11.20 - Stralengang in willekeurig optisch systeem **M**.

Omdat de determinant van iedere deelmatrix één is, is ook de determinant van **M** gelijk aan één. Dit is een belangrijke eigenschap die gebruikt kan worden ter controle van rekenfouten. Deze matrix heeft als elementen A,B,C en D, zodat:

$$\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\cdot\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad (11.118)$$

waarbij de indices refereren naar de respectievelijke apexvlakken.

Voor het bepalen van de ligging van de hoofdvlakken volgen we dezelfde procedure als bij de dikke lens.
De stralengang in figuur 11.21 wordt beschreven door de afbeeldingsmatrix **M** (in omgekeerde volgorde) te vermenigvuldigen met de afbeeldingsmatrix die hoort bij de verplaatsing over een afstand s_2:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n_2\alpha_2 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & B \\ \frac{s_2}{n_2}A + C & \frac{s_2}{n_2}B + D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} n_1\alpha_1 \\ x_1 \end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (11.119)$$

Uit de tweede vergelijking van (11.119) volgt, omdat voor evenwijdig invallende stralen moet gelden dat α_1=0:

$$x_2 = \left(\frac{s_2}{n_2}B + D\right)x_1 \qquad (11.120)$$

x_2 is een brandpunt als de waarde gelijk is aan nul en bovendien onafhankelijk is van de invalshoogte x_1. Uit vergelijking (11.120) zien we dat dit het geval is als:

$$D = -\frac{s_2}{n_2}B \quad \Rightarrow \quad s_2 = -\frac{D}{B}n_2 \qquad (11.121)$$

Het secundaire hoofdvlak H_2 wordt gedefinieerd door het snijpunt van de inkomende evenwijdige straal en de uittredende straal. De secundaire brandpuntsafstand van de dikke lens wordt gedefinieerd als de afstand tussen het secundaire hoofdvlak H_2 en het secundaire brandpunt F_2.

Uit figuur 11.21 is te zien dat deze secundaire brandpuntsafstand volgt uit:

$$\frac{x_1}{\mathrm{H_2F_2}} \approx -\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad n_2\alpha_2 = -\frac{n_2}{\mathrm{H_2F_2}}\cdot x_1 \qquad (11.122)$$

Uit de bovenste vergelijking van (11.119) zien we dat:

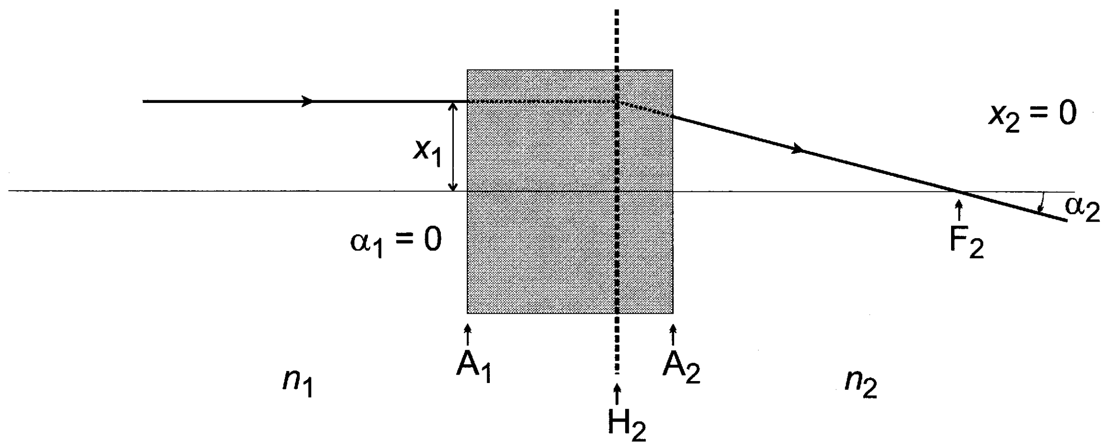
$$n_2\alpha_2 = B\cdot x_1 \qquad (11.123)$$

Door vergelijking (11.122) en (11.123) te vergelijken vinden we dat het secundaire brandpunt gegeven wordt door:

$$H_2F_2 = f_{sec} = -\frac{n_2}{B} \tag{11.124}$$

De positie van het secundaire hoofdvlak volgt nu uit (11.121) en (11.124)

$$A_2H_2 = s_2 - H_2F_2 = \frac{1-D}{B}n_2 \tag{11.125}$$



Figuur 11.21 - Bepaling van het secundaire hoofdvlak

Op analoge wijze vinden we voor de primaire brandpuntsafstand en de positie van het primaire hoofdvlak:

$$F_1H_1 = f_{prim} = -\frac{n_1}{B} \tag{11.126}$$

$$A_1H_1 = F_1H_1 - s_1 = \frac{A-1}{B}n_1 \tag{11.127}$$

De beeldvorming wordt bepaald door de beeldvormingsmatrix **M'** , die we krijgen door vermenigvuldiging van de volgende drie matrices:

$$\mathbf{M'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_2}{n_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s_1}{n_1} & 1 \end{bmatrix} \tag{11.128}$$

Hierin is s_1 de afstand van het voorwerp tot het eerste apexvlak en s_2 de afstand van het laatste apexvlak tot het beeld. Uitvermenigvuldigen geeft:

$$\mathbf{M'} = \begin{bmatrix} A + \frac{s_1}{n_1} B & B \\ C + \frac{s_2}{n_2} A + \frac{s_1}{n_1} D + \frac{s_1 s_2}{n_1 n_2} B & \frac{s_2}{n_2} B + D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \quad (11.129)$$

Beeldvorming treedt op als het element C' van deze matrix gelijk is aan nul. Als we voor v weer de afstand van het voorwerp tot het primaire brandpunt nemen, en voor b weer de afstand van het beeld tot het secundaire brandpunt nemen:

$$v \equiv s_1 + \mathrm{A_1 H_1} = s_1 + \frac{A-1}{B} n_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{s_1}{n_1} = \frac{v}{n_1} - \frac{A-1}{B} \quad (11.130)$$

$$b \equiv s_2 + \mathrm{H_2 A_2} = s_2 + \frac{D-1}{B} n_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{s_2}{n_2} = \frac{b}{n_2} - \frac{D-1}{B} \quad (11.131)$$

Uit $C'=0$ volgt door substitutie van bovenstaande twee vergelijkingen, na wat rekenwerk en met gebruikmaking van het feit dat iedere afbeeldingsmatrix **M** determinant 1 heeft:

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = -B = \frac{n_1}{f_{prim}} = \frac{n_2}{f_{\sec}} \quad (11.132)$$

De vergroting V wordt gegeven door het element D' van de beeldvormingsmatrix:

$$V = D' = \frac{s_2}{n_2} B + D \quad (11.133)$$

Met behulp van de vergelijkingen (11.130), (11.131) en (11.132) kan men laten zien dat:

$$V = \frac{b}{v} \frac{n_1}{n_2} \quad (11.134)$$

Samenvatting:

Een willekeurig paraxiaal optisch systeem met afbeeldingsmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

kan beschreven worden met behulp van de beeldvormingsformules die gelden voor een dunne lens:

$$\frac{n_1}{v} + \frac{n_2}{b} = -B \qquad \textbf{\textit{(lenzenformule)}}$$

$$V = \frac{b}{v} \frac{n_1}{n_2} \qquad \textbf{\textit{(lineaire vergroting)}}$$

waarin *v* en *b* de voorwerpsafstand respectievelijk de beeldafstand zijn, beide gemeten ten opzichte van de hoofdvlakken.

De ligging van de hoofdvlakken ten opzichte van de apexvlakken

wordt hierbij gegeven door:

$$A_1H_1 = \frac{A-1}{B} n_1$$

$$A_2H_2 = \frac{1-D}{B} n_2$$

De primaire brandpuntsafstand f_{prim} en de secundaire brandpunts-afstand f_{sec} zijn gegeven door:

$$F_1H_1 = f_{prim} = -\frac{n_1}{B}$$

$$H_2F_2 = f_{sec} = -\frac{n_2}{B}$$

De sterkte P van het systeem is gedefinieerd als:

$$P \equiv -B \left(= \frac{n_1}{f_{prim}} = \frac{n_2}{f_{sec}} \right)$$

(Tekenafspraak: afstanden als A_1H_1 zijn positief als H_1 rechts van A_1 ligt.)

11.3.13 Vraagstukken ter voorbereiding van opdracht TN533

Vraagstuk 1

Een stelsel van twee dunne lenzen bevindt zich in lucht (n=1). De eerste lens is positief met brandpuntsafstand f_1 = 15 cm, de tweede lens is negatief en heeft een brandpuntsafstand f_2 = –10 cm. De afstand tussen de lenzen is d = 12 cm. Op een afstand s_1 = 60 cm voor de positieve lens bevindt zich een verlicht voorwerp. Op afstand s_2 van de negatieve lens wordt een scherp beeld gevormd.

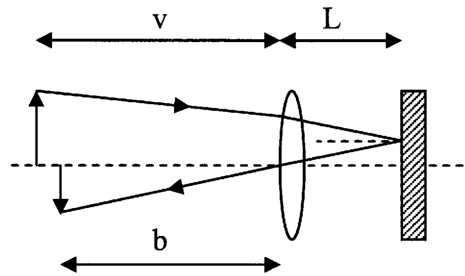
a) Bereken de afbeeldingsmatrix $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ van het gegeven stelsel.
b) Bereken de brandpuntsafstanden f_{prim} en f_{sec}. (Wat valt je op ?)
c) Bereken de voorwerpsafstand v. (Bereken hiervoor eerst A_1H_1.)
d) Bereken de beeldafstand b en de afstand s_2. (Hiervoor is A_2H_2 nodig.)
e) Geef in een schets de plaatsen aan van de hoofdvlakken, de brandpuntsvlakken, het voorwerp en het beeld. (Bereken hiervoor F_1A_1 en A_2F_2 .)

Vraagstuk 2

Een stelsel bestaat uit een dunne positieve lens met brandpuntsafstand f en een vlakke spiegel op afstand L van de lens. Zie figuur 11.22.

a) Bepaal de beeldvormingsmatrix $\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$ van het gegeven stelsel.
b) Onder welke voorwaarden is er sprake van beeldvorming.
c) Naast beeldvorming geldt v=f. Wat betekent dit voor de beeldafstand b? (autocollimatie-methode.)
d) Wat valt bij het vorige onderdeel c) op voor de waarde van L?

e) Kan met de autocollimatie-methode ook de brandpuntsafstand van het lenzenstelsel uit vraagstuk 1 bepaald worden ?



figuur 11.22

→ *Met de autocollimatie-methode kan de plaats van de hoofdbrandpunten van een willekeurig lenzenstelsel (met een reëel beeld) bepaald worden.*

Vraagstuk 3

(Zie vraagstuk 1)

a) Bereken de vergroting V.
b) Vindt een uitdrukking voor V als functie van de brandpuntsafstand en s_2.

→ *Door meting van de vergroting en de afstand s_2 kan de brandpuntsafstand van het gegeven lenzenstelsel bepaald worden.*

12 Tweede-Orde Systemen

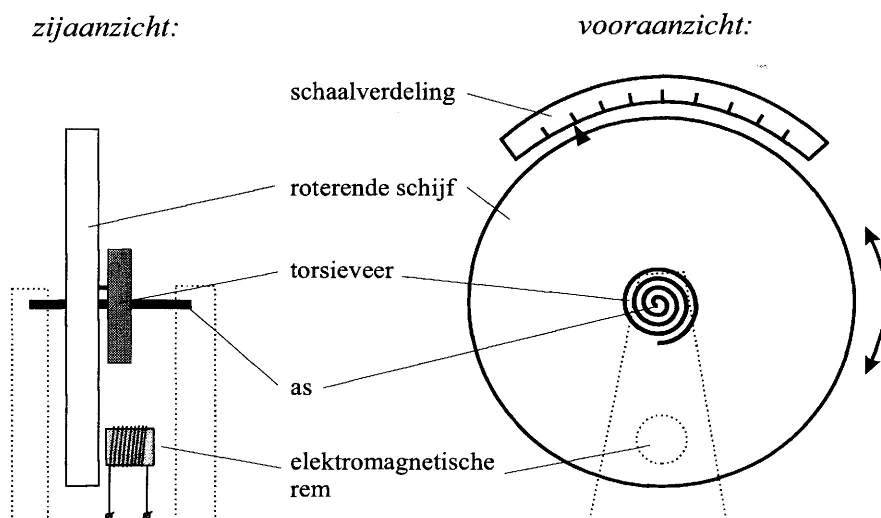
12.1 Inleiding

12.1.1 Tweede-orde systemen

Dit hoofdstuk gaat over twee *trillende systemen*: de *rotatieslinger* en de *elektrische trillingskring*. Deze twee systemen, gedeeltelijk of geheel het onderwerp van de practicumopdracht TN423 of TN426, worden beschreven door hetzelfde (wiskundige) model, het model van de *tweede-orde systemen.*
Het is raadzaam om dit hoofdstuk goed door te lezen voordat je begint met het schrijven van een meetprocedure. Concentreer je hierbij op de hoofdlijnen. De wiskundige details, beschreven in de inspringende alinea's in een kleiner lettertype, zijn voor de liefhebber.
In deze inleidende paragraaf zullen we de twee systemen kort beschrijven.

12.1.2 De vrije rotatieslinger

De rotatieslinger bestaat uit een ronde schijf, waaraan in het middelpunt een as bevestigd is. De schijf kan (vrijwel) wrijvingsloos om deze as ronddraaien (zie figuur 12.1 voor een schematische tekening van de rotatieslinger).



Figuur 12.1 - De rotatieslinger

Aan de schijf is een torsieveer bevestigd; dit is een veer die bestaat uit een opgerolde strip metaal, die een kracht (preciezer: een krachtmoment) gaat uitoefenen als hij, vanuit de evenwichtsstand, verder wordt opgerold of juist uitgerold. (Torsieveren zijn je waarschijnlijk wel bekend uit bijvoorbeeld mechanische uurwerken).

Geeft men de schijf een uitwijking dan zal de torsieveer de schijf in beweging zetten. Als de schijf door de evenwichtsstand heen gaat dan zal de torsieveer een kracht gaan uitoefenen die tegengesteld is aan de bewegingsrichting, zodat een periodieke beweging (trilling) ontstaat.

De rotatieslinger is voorzien van een schaalverdeling, waarop de uitwijkingshoek van de schijf af te lezen is. Om de periodieke beweging te kunnen *dempen* wordt gebruik gemaakt van een *elektromagnetische rem*, waarover in de volgende paragraaf een aantal details volgen.

12.1.3 De elektromagnetische rem bij de rotatieslinger

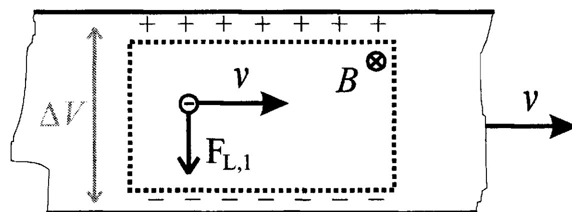
De elektromagnetische rem bestaat uit een spoel waardoor een gelijkstroom met sterkte I_S heen gestuurd wordt. De spoel wekt een magnetisch veld op, waardoor in het metaal van de schijf zogenaamde *wervelstromen* (eddy currents) optreden. Deze wervelstromen zorgen voor een remkracht (en dus ook een krachtmoment) op de schijf, die recht evenredig is met het kwadraat van de stroomsterkte door de spoel:

$$F_{rem} \sim v \cdot I_S^2 \qquad (12.1)$$

Voor de volledigheid volgt hieronder een afleiding van deze formule:

In figuur 12.2a is een deel van de metalen schijf getekend; het magnetisch veld B dat veroorzaakt wordt door de spoel bevindt zich binnen de gestippelde rechthoek en gaat loodrecht het vlak van de tekening in. Dit veld B is recht evenredig met de stroomsterkte door de spoel:

$$B \sim I_S \qquad (12.2)$$



Figuur 12.2a

Doordat de schijf (met een snelheid v) beweegt, werkt er op de vrije elektronen een lorentzkracht $F_{L,1}$ die de elektronen naar beneden duwt, zodat een potentiaalverschil ΔV ontstaat. Er zal een evenwicht ontstaan waarbij de lorentzkracht op de elektronen even groot en tegengesteld is aan de elektrische kracht ten gevolge van het potentiaalverschil ΔV:

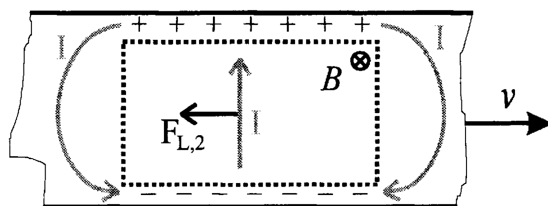
$$F_{L,1} = F_e \Rightarrow q \cdot v \cdot B = q \cdot \frac{\Delta V}{l} \qquad (12.3)$$

(q is hier de lading van het elektron, en l (ongeveer) de hoogte van de rechthoek waarin het veld zich bevindt.)

Uit deze formule volgt direct:

$$\Delta V \sim v \cdot B \qquad (12.4)$$

Dit potentiaalverschil zorgt voor een naar beneden gerichte stroom buiten het magneetveldgebied (de rechthoek waar het magnetisch veld aanwezig is) die even groot is als de naar boven gerichte stroom binnen het magneetveldgebied (dit is de wervelstroom; zie figuur 12.2b). De stroomsterkte van deze stroom is gelijk aan $I = \Delta V / R_{buiten}$, waarin R_{buiten} de weerstand is die deze stroom op zijn weg ontmoet. In het magneetveldgebied Op deze stroom werkt een tweede lorentzkracht $F_{L,2}$ die naar rechts gericht is, dus tegengesteld aan de bewegingsrichting en voldoet aan:



Figuur 12.2b

$$F_{L,2} = B \cdot I \cdot l \sim B \cdot (\frac{\Delta V}{R_{buiten}}) \cdot l \text{dus} : F_{L,2} \sim v \cdot B^2 \qquad (12.5)$$

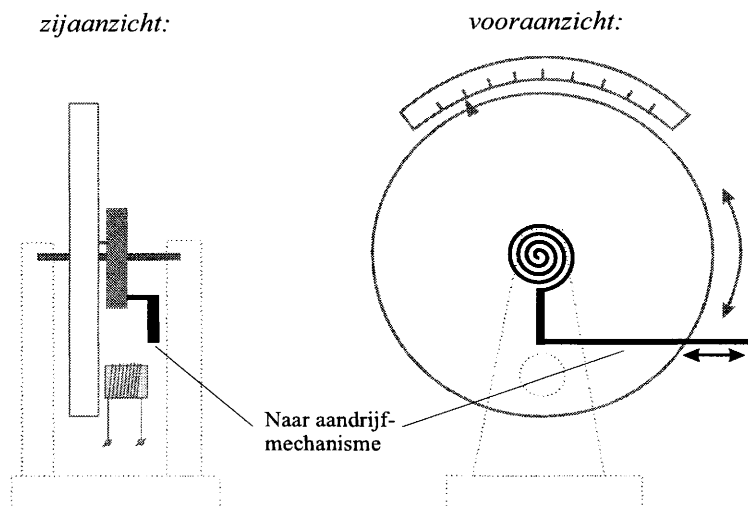
Waarbij we vergelijking (12.4) gebruikt hebben. Omdat B recht evenredig is met de stroom door de spoel (vgl.12.2) is de evenredigheid van vergelijking (12.5) te schrijven als:

$$F_{L,2} \sim v \cdot I_S^2 \qquad (12.1)$$

We vinden dus een remmende kracht $F_{rem} = F_{L,2}$ die aan vergelijking (12.1) voldoet.

12.1.4 De gedwongen rotatieslinger

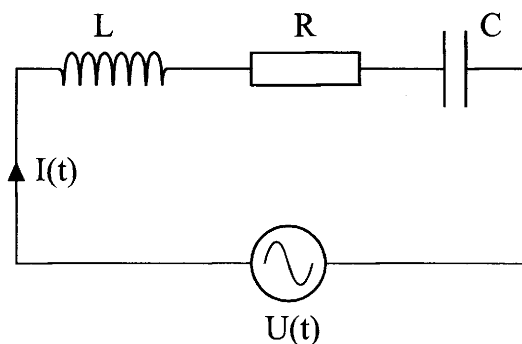
Het vaste uiteinde van de torsieveer van de rotatieslinger kan worden losgemaakt en worden bevestigd aan een motor met instelbaar toerental, die dit uiteinde in periodieke beweging brengt. De schijf, waaraan het andere uiteinde van de torsieveer bevestigd is, zal hierdoor ook in beweging komen, en uiteindelijk een periodieke beweging met dezelfde frequentie als de motor gaan uitvoeren. Met andere woorden: de rotatieslinger gaat een *gedwongen trilling* uitvoeren (zie figuur 12.3).



Figuur 12.3 - De gedwongen rotatieslinger

12.1.5 De elektrische trillingskring

De elektrische trillingskring bestaat uit een weerstand (met weerstandswaarde *R*), een spoel (met zelfinductie *L*) en een condensator (met capaciteit *C*), die in serie geschakeld aangesloten zijn op een wisselspanningsbron (zie het schema van figuur 12.4).



Figuur 12.4 - De elektrische trillingskring

12.2 De vrije rotatieslinger

12.2.1 De bewegingsvergelijking van de vrije rotatie slinger

In deze paragraaf zullen we laten zien dat de beweging van de vrije rotatieslinger[5] beschreven wordt door de vergelijking:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{d\phi}{dt}+\omega_0^2\phi=0 \qquad (12.7)$$

Hierin is ϕ de uitwijking van de rotatieslinger in radialen; ϕ is natuurlijk een functie van de tijd. Verder is:

$$\omega_0{}^2=\frac{D}{I} \qquad (12.8)$$

D is hier de *torsieconstante* van de torsieveer (dit is een soort veerconstante); I is het *traagheidsmoment* van de rotatieslinger (preciezer gezegd: van de schijf en de as) en ω_0 wordt de *eigen(hoek)frequentie* genoemd[6].

De constante β staat bekend als de *dempingsfactor*. Deze dempingsfactor is bij de met een elektromagnetische rem gedempte rotatieslinger die in practicumopdracht TN423 of TN426 gebruikt wordt recht evenredig met het kwadraat van de stroomsterkte I_S door de spoel:

$$\beta=K\cdot I_S^2 \qquad (12.9)$$

waarin K een constante is.

Een rotatieslinger is een zogenaamd *star lichaam*, dat als enige bewegingsmogelijkheid de rotatie om zijn as heeft. Hiervoor geldt als algemene vergelijking:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2}=\sum M \qquad (12.10)$$

Hierin is I het *traagheidsmoment* van het lichaam (t.o.v. zijn rotatieas), ϕ de uitwijking (hoek) t.o.v. de beginstand en ΣM de som van alle krachtmomenten die op het lichaam werken.
Bij de ongedempte rotatieslinger werkt er slechts één krachtmoment, namelijk het moment M_t dat de torsieveer uitoefent:

$$M_t=-D\cdot\phi \qquad (12.11)$$

De bovenstaande formule is de *veerwet* voor een torsieveer en kan beschouwd worden als de definitie van de *torsieconstante* D van de torsieveer. Natuurlijk is de kracht, dus ook het moment, tegengesteld aan de richting van de uitwijking; vandaar het minteken.
Wordt de rotatieslinger door een elektromagnetische rem gedempt, dan is er nog een extra moment M_{rem}. Dit moment wordt veroorzaakt door de remkracht van vergelijking (12.1):

$$F_{rem}\sim v\cdot I_S^2 \qquad (12.1)$$

De snelheid v wordt bepaald door de snelheid van de rotatieslinger, en is dus recht evenredig met de hoeksnelheid $d\phi/dt$:

$$v\sim\frac{d\phi}{dt} \qquad (12.12)$$

Het moment van de kracht F_{rem} is natuurlijk recht evenredig met de kracht zelf, zodat:

$$M_{rem}=-C\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot I_S^2 \qquad (12.13)$$

C is hier een evenredigheidsconstante.

[5] Zie paragraaf 12.1.2 voor een beschrijving van de vrije rotatieslinger

[6] Het verband tussen de frequentie f en de hoekfrequentie ω is: $\omega=2\pi f$

Invullen van de krachtmomenten (11.11) en (11.13) in de bewegingsvergelijking (11.10) geeft:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = M_t + M_{rem} = -D\cdot\phi - C\cdot I_S^2\cdot\frac{d\phi}{dt} \qquad (12.14)$$

wat eenvoudig om te schrijven is tot:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{C\cdot I_S^2}{I}\cdot\frac{d\phi}{dt} + \frac{D}{I}\cdot\phi = 0 \qquad (12.15)$$

Deze vergelijking heeft de vorm van vergelijking (12.7) met:

$$\omega_0^2=\frac{D}{I}\text{en }:\beta=\frac{C}{2\omega_0\cdot I}\cdot I_S^2=K\cdot I_S^2 \qquad (12.16)$$

met K een constante. Hiermee is het gestelde aangetoond.

12.2.2 De oplossing van de bewegingsvergelijking

De bewegingsvergelijking (12.7) van de vrije, gedempte rotatieslinger is oplosbaar met de methodes die in het eerstejaarsvak Calculus aan de orde komen. Afhankelijk van de grootte van de dempingsfactor verandert het karakter van de oplossingen van een min of meer periodiek verschijnsel ($0\leq\beta<1$), tot een verschijnsel waarin geen trilling meer te herkennen is ($\beta\geq1$).

Voor de practicumopdracht is alleen het eerste geval van belang. We kunnen dan, op een fasefactor na[7], de algemene oplossing van de bewegingsvergelijking (12.7) schrijven als de volgende vergelijking:

$$\phi(t)=\phi_0\cdot e^{-\beta\omega_0 t}\cdot\cos(\omega_d t) \qquad (12.17)$$

demping | harmonische trilling

Hierin is ϕ_0 de beginuitwijking en ω_d de frequentie van de gedempte trilling:

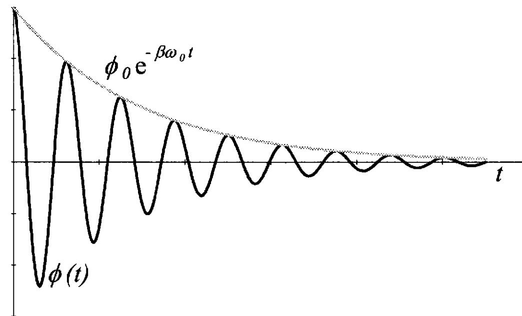
$$\omega_d=\omega_0\cdot\sqrt{1-\beta^2} \qquad (12.18)$$

Merk op dat, omdat $0\leq\beta<1$, de frequentie van de gedempte trilling (ω_d) altijd *kleiner* is dan de frequentie die de rotatieslinger zou hebben als hij ongedempt was (ω_0).

We zien dat de oplossing (12.17) bestaat uit het produkt van een harmonische trilling met frequentie ω_d en een dempingsterm, die er voor zorgt dat de amplitude van de trilling geleidelijk aan afneemt (zie figuur 12.5).

[7] strikt genomen is de algemene oplossing gelijk aan:

$$\phi(t) = \phi_0\cdot e^{-\beta\omega_0 t}\cdot\cos(\omega_d t + \theta)$$



Figuur 12.5 - Gedempte trilling

12.2.3 Torsieconstante en logaritmisch decrement

De torsieconstante

Als men geen stroom door de elektromagnetische dempingsspoel heen stuurt, voert de rotatieslinger een vrijwel ongedempte trilling uit. Men kan dan door de frequentie van de trilling te meten de verhouding van de torsieconstante van de torsieveer en het traagheidsmoment van de slinger bepalen: zie vergelijking (12.8).

Het logaritmisch decrement

Ook de grootte van de demping is te bepalen, en in het geval van de elektromagnetische demping, is het verband tussen dempingsfactor en dempingsstroomsterkte te verifiëren.:

$$\beta = K \cdot I_S^2 \tag{12.9}$$

Hiertoe kijkt men naar een grootheid die bekend staat als het *logaritmisch decrement d.* Het logaritmisch decrement is gedefinieerd als de natuurlijke logaritme uit de verhouding van de amplitude's van twee opeenvolgende periodes. Deze verhouding blijkt namelijk constant te zijn, zoals we even verderop zullen aantonen.

Als de uitwijking $\phi(t)$ maximaal is op het tijdstip t_0, dan kan men het logaritmisch decrement d in formulevorm schrijven als:

$$d = \ln\left(\frac{\phi(t_0)}{\phi(t_0 + T_d)}\right) \tag{12.19}$$

Hierin is T_d de trillingstijd van de gedempte trilling:

$$T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{12.20}$$

Zoals hieronder zal worden aangetoond geldt voor het logaritmisch decrement:

$$d = 2\pi \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12.21}$$

Dit kan men voor kleine β ($\sqrt{(1-\beta^2)} \approx 1$) benaderen door:

$$d \approx 2\pi\beta \tag{12.22}$$

en omdat β evenredig is met het kwadraat van de stroomsterkte I_S door de elektromagnetische dempingsspoel, moet dit dus (bij benadering) ook voor het logaritmisch decrement gelden:

$$d \sim I_S^2 \tag{12.23}$$

We laten zien dat het logaritmisch decrement constant is en bewijzen vergelijking (12.21):
We gaan uit van de definitie van het logaritmisch decrement (vgl.12.19) en berekenen $\phi(t_0)$ en $\phi(t_0+T_d)$ gebruik makend van het feit dat voor t_0 geldt dat $\phi(t)$ maximaal is, dus $\cos(\omega_0 t_0) = \cos(\omega_0(t_0+T_d)) = 1$. Dan is:

$$d = \ln\left(\frac{\phi(t_0)}{\phi(t_0+T_d)}\right) = \ln\left(\frac{\phi_0\, e^{-\beta\omega_0 t_0}}{\phi_0\, e^{-\beta\omega_0 (t_0+T_d)}}\right) =$$

$$\ln(e^{\beta\omega_0 T_d}) = \beta\,\omega_0 T_d \qquad (12.24)$$

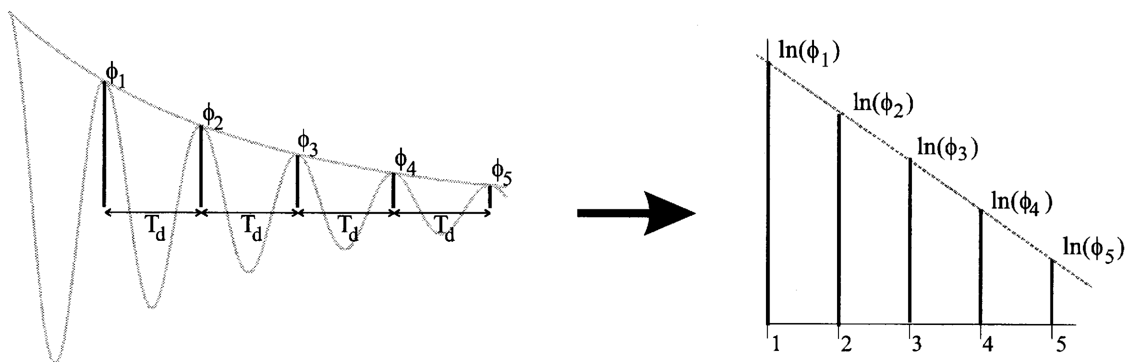
Aangezien β, ω_0 en T_d alle drie constanten zijn is het logaritmisch decrement dus ook constant.
Vergelijking (12.18) en (12.20) kunnen we gebruiken om T_d uit te drukken in β en ω_0, waarmee vergelijking (12.24) kan worden omgeschreven in de vorm van vergelijking (12.21):

$$d = \beta\,\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}} = 2\pi\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (12.21)$$

Bepaling van het logaritmisch decrement:
Het logaritmisch decrement is het nauwkeurigst te bepalen door van een reeks opeenvolgende amplitudes de natuurlijke logaritme te nemen en deze uit te zetten tegen het nummer van de amplitude. Aangezien:

$$d = \ln\left(\frac{\phi(t_0)}{\phi(t_0+T_d)}\right) = \ln(\phi(t_0)) - \ln(\phi(t_0+T_d)) \qquad (12.25)$$

volgt d uit de helling van de gemaakte grafiek. Zie ook figuur 12.6.



Figuur 12.6 - Logaritmisch decrement

12.3 De gedwongen rotatieslinger

12.3.1 De bewegingsvergelijking van de gedwongen rotatie slinger

De beweging van de gedwongen rotatieslinger[8] wordt beschreven door dezelfde vergelijking 12.7 die de vrije rotatieslinger beschrijft, waaraan een extra term wordt toegevoegd die te maken heeft met de kracht die de motor op het systeem uitoefent:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\beta\omega_0\frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2\phi = \omega_0^2\alpha \qquad (12.26)$$

Hierin is α de door de motor veroorzaakte uitwijking van het uiteinde van de torsieveer dat niet aan de rotatieslinger vast zit. Ook α is, net als ϕ, een functie van de tijd t en wordt in radialen uitgedrukt. De grootheden ϕ, ω_0 en β hebben dezelfde betekenis en definitie als bij de vrije rotatieslinger (zie paragraaf 12.2.1):

$$\omega_0{}^2 = \frac{D}{I} \quad ; \quad \beta = K \cdot I_S^2$$

Door de overbrenging dwingt de motor het uiteinde van de torsieveer een harmonische beweging te maken, dus:

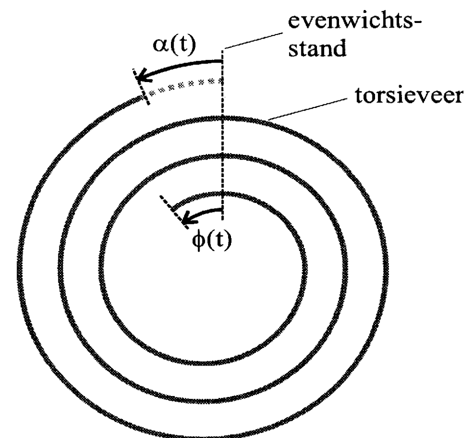
$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (12.27)$$

Let hierbij op! De hoekfrequentie ω wordt bepaald door het toerental van de motor en heeft dus niets te maken met ω_0, de eigen hoekfrequentie van de rotatieslinger!

We bewijzen vergelijking (12.26):

We gaan weer uit van de bewegingsvergelijking (12.10) die moet gelden voor ieder star lichaam, dus ook voor de gedwongen rotatieslinger. We kunnen, net als in paragraaf 12.2.1, de krachtmomenten opschrijven die op de rotatieslinger werken.

Het krachtmoment ten gevolge van de elektromagnetische rem is hetzelfde als bij de vrije rotatieslinger; het krachtmoment dat de torsieveer uitoefent wordt anders. De motor veroorzaakt namelijk een uitwijking *$\alpha(t)$* aan het ene uiteinde van de torsieveer; de rotatieslinger zorgt voor een uitwijking *$\phi(t)$* aan het andere uiteinde (zie figuur 12.7).



Figuur 12. 7 - Torsieveer

Netto krijgt de torsieveer daardoor een uitwijking ($\phi(t) - \alpha(t)$), zodat het krachtmoment dat de torsieveer op de rotatieslinger uitoefent gelijk wordt aan:

$$M_t = -D \cdot (\phi - \alpha) \qquad (12.28)$$

Hiermee kunnen we de bewegingsvergelijking (12.10) schrijven als:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = M_t + M_{rem} = -D \cdot (\phi - \alpha) \quad - \quad C \cdot I_S^2 \cdot \frac{d\phi}{dt} \qquad (12.29)$$

wat eenvoudig om te schrijven is tot:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad + \quad \frac{C \cdot I_S^2}{I} \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad + \quad \frac{D}{I} \cdot \phi \quad = \quad \frac{D}{I} \cdot \alpha \qquad (12.30)$$

en dit is precies de vorm van vergelijking (12.26) (met $K = C/I$).

[8] Zie paragraaf 1.3 voor een beschrijving van de gedwongen rotatieslinger.

12.3.2 De oplossing van de bewegingsvergelijking als $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t)$

Ook de bewegingsvergelijking 12.26 van de gedwongen rotatieslinger is oplosbaar met de methodes uit het eerstejaarsvak 'Lineaire Algebra'. De belangrijkste resultaten zijn:

1. De algemene oplossing $\phi_{alg}(t)$ van (12.26) is de som van:
   - de algemene oplossing van de bewegingsvergelijking van de vrije, gedempte rotatieslinger[9], die gegeven wordt door vergelijking 12.17 en die we hier zullen aangeven met $\phi_{hom}(t)$;
   - een bijzondere ('particuliere') oplossing van de bewegingsvergelijking 12.26, die we aan zullen geven met $\phi_{part}(t)$:

   $$\phi_{alg}(t) = \phi_{hom}(t) + \phi_{part}(t) \qquad (12.31)$$

2. Als we aannemen dat er demping is (β>0), dan zal naar mate er meer tijd verstrijkt de amplitude van de homogene oplossing steeds kleiner worden (zie paragraaf 12.2.2), zodat voor grote t moet gelden:

   $$\phi_{alg}(t) \approx \phi_{part}(t) \qquad \text{voor grote } t \qquad (12.32)$$

   We houden uiteindelijk dus alleen de particuliere oplossing over.

3. Als $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t)$ dan is er altijd één bijzondere oplossing $\phi_{part}(t)$ te vinden van de vorm:

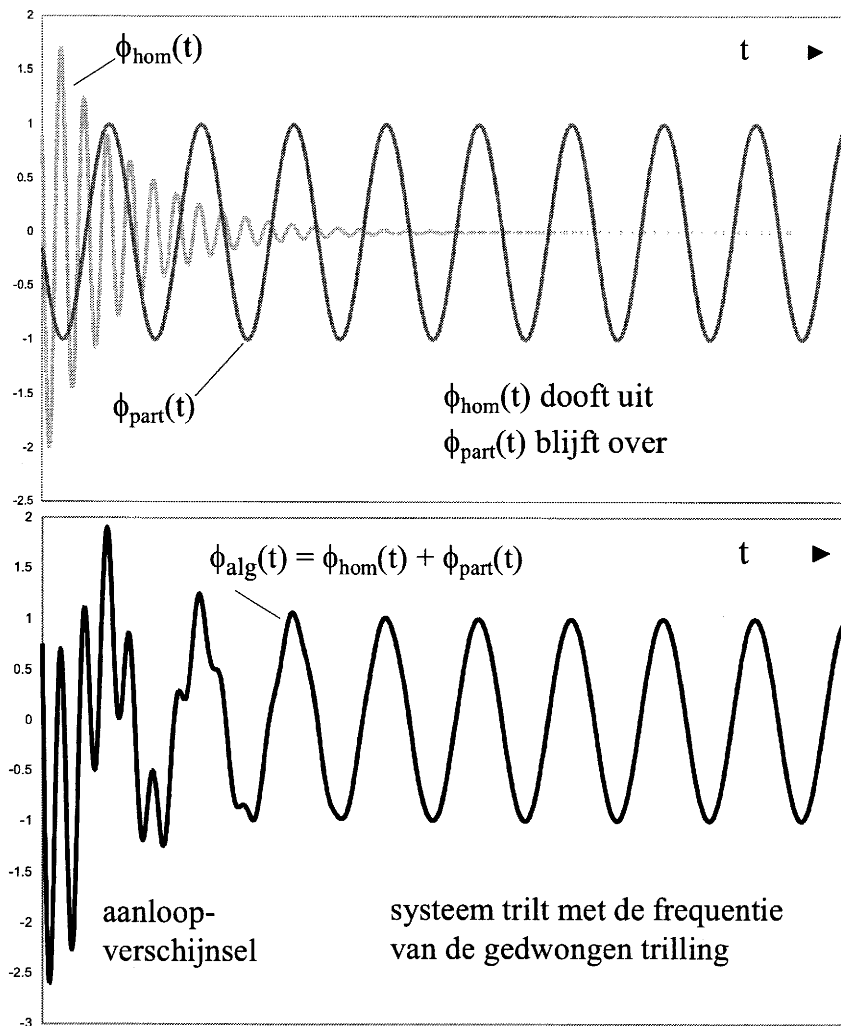
   $$\phi_{part}(t) = \phi_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \qquad (12.33)$$

   Hierin is ω de hoekfrequentie van de motor, ϕ_0 de amplitude van de trilling die de rotatieslinger uiteindelijk gaat uitvoeren en θ een nog te bepalen hoek die een fase-verschuiving tussen $\alpha(t)$ en $\phi_{part}(t)$ aangeeft.

In figuur 12.8 zijn deze drie punten aanschouwelijk gemaakt. In de bovenste grafiek zijn zowel $\phi_{hom}(t)$ als $\phi_{part}(t)$ getekend. Duidelijk te zien is dat $\phi_{hom}(t)$ na enige tijd 'uitdooft', zodat $\phi_{part}(t)$ overblijft.

In de onderste grafiek zijn $\phi_{hom}(t)$ en $\phi_{part}(t)$ bij elkaar opgeteld. Dit is de beweging zoals hij ook tijdens het experiment is waar te nemen: na een *aanloopverschijnsel* waarin de beweging grillig en niet periodiek verloopt, gaat de rotatieslinger uiteindelijk *een harmonische trilling uitvoeren met dezelfde frequentie als de motor.*

[9] Deze wordt in wiskundige termen de *homogene differentiaalvergelijking* genoemd



Figuur 12. 8 – De gedwongen rotatieslinger

Het blijkt dat de verhouding tussen de amplitude van de gedwongen trilling van de rotatieslinger en de amplitude van de uitwijking die de motor veroorzaakt, een functie van de hoekfrequentie ω van de motor is; men kan berekenen dat:

$$\frac{\phi_0}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\beta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \qquad (12.34)$$

Voor de *faseverschuiving* θ geldt:

$$\theta = -\arctan\left(\frac{2\beta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) \qquad (12.35)$$

In figuur 12.9 en 12.10 zijn, voor verschillende waarden van de dempingsfactor β, de grafieken van deze twee grootheden getekend. Ze worden respectievelijk de **amplitudekarakteristiek** en de **fasekarakteristiek** van de gedwongen rotatieslinger genoemd.

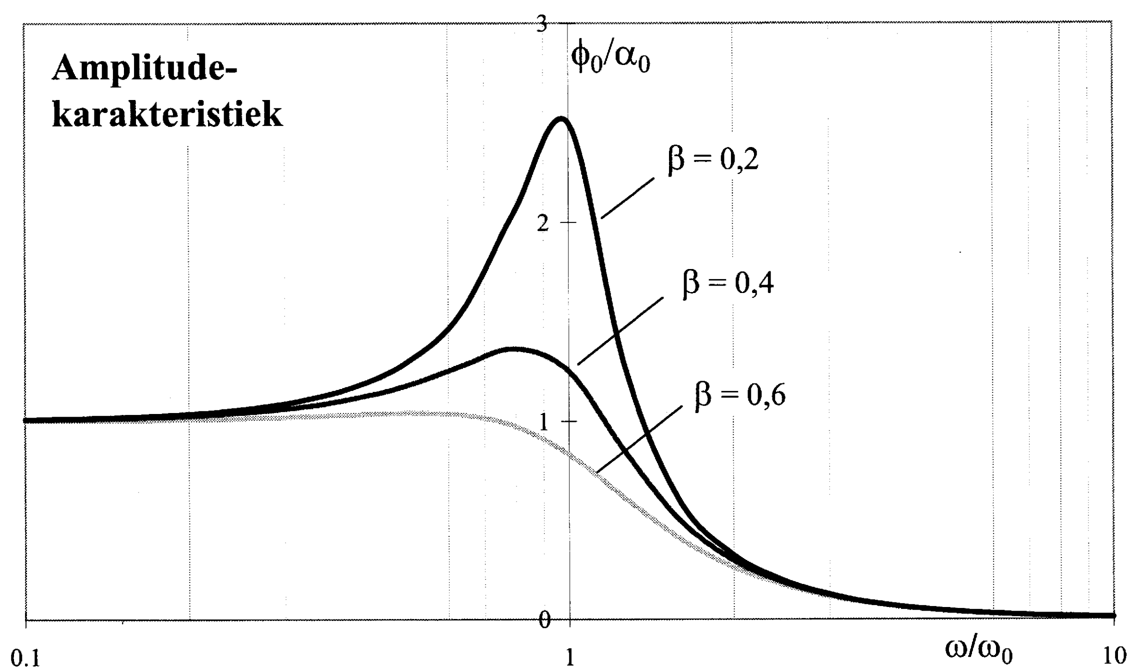
12.3.3 Amplitude-/fase-karakteristiek en de kwaliteitsfactor Q

De amplitudekarakteristiek
De amplitudekarakteristiek is betrekkelijk eenvoudig op te meten door de amplitude van de rotatieslinger als functie van het toerental van de motor te bepalen. Men moet dan wel steeds even wachten totdat de aanloopverschijnselen uitgedoofd zijn.

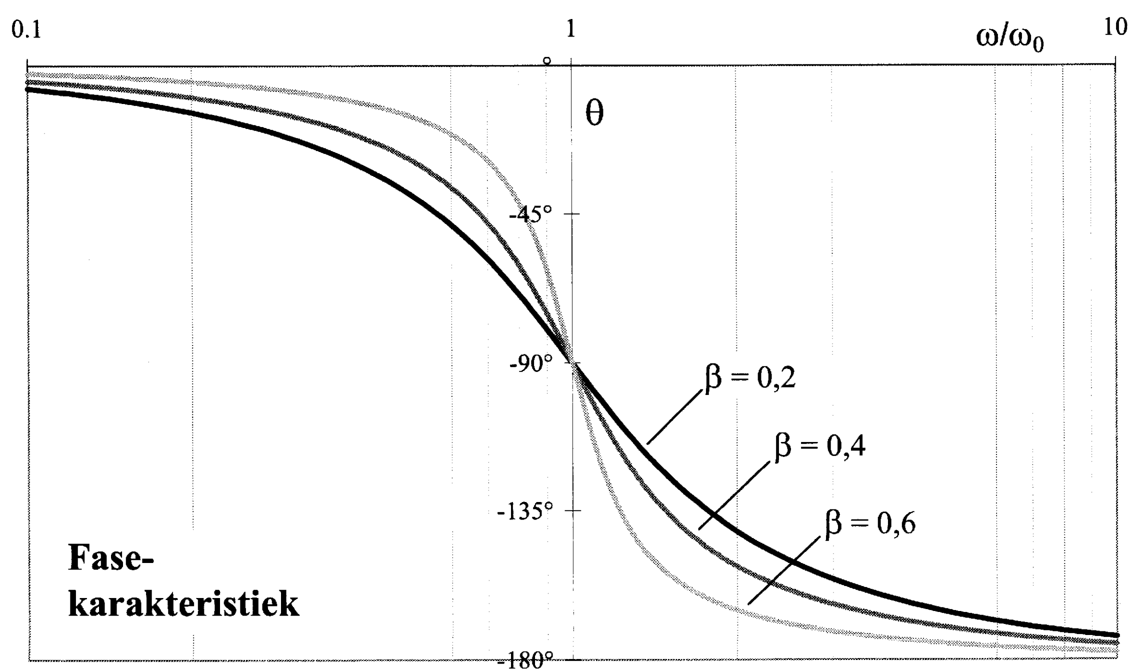
Belangrijke kenmerken van de amplitudekarakteristiek zijn:
- als ω/ω_0 klein is, dan is $\phi_0/\alpha_0 = 1$, de slinger zit voor lage frequenties als het ware star aan de motor verbonden;
- als ω/ω_0 groot is, dan nadert ϕ_0/α_0 naar nul, de slinger is niet meer in staat de motor te volgen;
- als $\omega \approx \omega_0$ dan treedt er voor sommige waarden van β een maximum op. Dit maximum wordt de *resonantiepiek* genoemd, aangezien de uitwijking van de rotatieslinger hier vele malen groter kan worden dan de amplitude van de motor.
  Men kan laten zien dat dit maximum optreedt als $\beta < ½$ en dat dit maximum wordt aangenomen voor:
  $$\omega_M = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2\beta^2} \qquad (12.36)$$
  De hoogte van de resonantiepiek wordt gegeven door:
  $$\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{\max} = \frac{1}{2\beta \cdot \sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad (12.37)$$

De fasekarakteristiek
De fasekarakteristiek is moeilijker te meten dan de amplitudekarakteristiek. Het is echter wel mogelijk de belangrijkste kenmerken ook experimenteel te verifiëren:
- als ω/ω_0 klein is, dan is $\theta = 0°$, motor en rotatieslinger zijn dan in fase;
- als ω/ω_0 groot is, dan is $\theta = -180°$, de slinger loopt precies een halve trillingstijd achter op de motor;
- als $\omega \approx \omega_0$ dan is er een omslaggebied waarin het faseverschil ongeveer -90° is.

De kwaliteitsfactor Q
De kwaliteitsfactor is gedefinieerd als:
$$Q = \frac{1}{2\beta} \qquad (12.38)$$
De kwaliteitsfactor is een maat voor de kwaliteit van de resonantie: hoe groter Q is, hoe hoger de resonantiepiek is, dus des te ‘beter’ de resonantie is.



Figuur 12.9 - Amplitudekarakteristiek voor verschillende waarden van β.



Figuur 12.10 - Fasekarakteristiek voor verschillende waarden van β.

Er zijn meerdere manieren om de kwaliteitsfactor te meten:

1. Door meting van de hoogte van de resonantiepiek. Door substitutie van (12.38) ($\beta = \frac{1}{2Q}$)

   in vergelijking 12.37 volgt dan:

$$\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{max} \approx Q\sqrt{\frac{Q^2}{Q^2 - \frac{1}{4}}} \approx Q \qquad (12.39)$$

   waarbij het 'ongeveer-gelijk-aan'-teken geldt voor grote Q (dus kleine β).

2. Men kan ook gebruik maken van de zogenaamde '3dB-punten'. Dit zijn de punten ω_{rechts} en ω_{links} waarvoor geldt:

$$\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{max} \qquad (12.40)$$

   Na flink wat rekenwerk kan men uit vergelijking (12.34) laten zien dat:

$$\Delta\omega \equiv \omega_{rechts} - \omega_{links} = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{\frac{Q^2 - \frac{3}{4}}{Q^2 - \frac{1}{2}}} \qquad (12.41)$$

   Uit (12.41) volgt direct dat:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q\sqrt{\frac{Q^2 - \frac{1}{2}}{Q^2 - \frac{3}{4}}} \approx Q \qquad (12.42)$$

   De laatste benadering geldt weer alleen voor grote Q.

3. Men kan Q ook bepalen uit het gedrag van de vrije rotatieslinger. Bij vaste stroomsterkte I_S door de elektromagnetische remspoel is hier namelijk uit het logaritmisch decrement d de dempingsfactor β te bepalen (zie paragraaf 12.2.3; vergelijking 12.21):

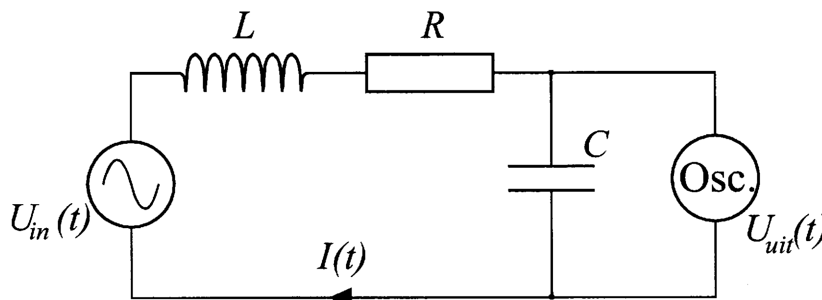
$$d = 2\pi\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 + \frac{1}{4}} \approx \frac{\pi}{d} \qquad (12.43)$$

   De laatste benadering geldt weer alleen voor grote Q.

12.4 De elektrische trillingskring

12.4.1 De elektrische trillingskring: beschrijving

De elektrische trillingskring bestaat, zoals gezegd in paragraaf 12.1.5 uit een weerstand (met weerstandswaarde *R*), een spoel (met zelfinductie *L*) en een condensator (met capaciteit *C*) die in serie geplaatst zijn en op een wisselspanningsbron (met wisselspanning $U_{in}(t)$) zijn aangesloten. Vervolgens wordt de spanning $U_{uit}(t)$ over de condensator met een oscilloscoop gemeten (zie figuur 12.11).



Figuur 12.11

Hieronder zullen wij met behulp van de *spanning-stroom (U-I) relaties* voor de componenten een differentiaalvergelijking afleiden voor het meetsignaal $U_{uit}(t)$. De resultaten zijn ook te verkrijgen met behulp van de *impedanties* van de componenten (zie hoofdstuk 7 van deze handleiding).

Voor de drie componenten gelden de volgende spanning-stroom relaties (zie ook paragraaf 7.3.1):

$$U_L(t)=L\cdot\frac{dI(t)}{dt} \tag{12.44}$$

$$U_R(t)=R\cdot I(t) \tag{12.45}$$

$$U_C(t)=\frac{Q(t)}{C}=\frac{1}{C}\cdot\int I(t)dt \tag{12.46}$$

Hierin zijn U_L, U_R en U_C de spanningen over respectievelijk de spoel, weerstand en condensator, I(t) de stroomsterkte in de componenten en Q(t) de hoeveelheid lading die op tijdstip t door de draad naar de condensator is gestroomd.

Door deze drie spanningen op te tellen vinden we $U_{in}(t)$:

$$U_{in}(t)=L\cdot\frac{dI(t)}{dt}+R\cdot I(t)+\frac{1}{C}\cdot\int I(t)dt \tag{12.47}$$

De stroomsterkte willen we elimineren ten gunste van het meetsignaal $U_{uit}(t)$. Dit kan door te bedenken dat:

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}=C\cdot\frac{dU_{uit}(t)}{dt} \tag{12.48}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de definitie van de capaciteit: C = Q/U.
Vullen we 12.48 in in vergelijking 12.47 en delen we vervolgens door L·C, dan vinden we:

$$\frac{d^2U_{uit}(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dU_{uit}(t)}{dt}+\frac{1}{LC}\cdot U_{uit}(t)=\frac{1}{LC}\cdot U_{in}(t) \tag{12.49}$$

Deze vergelijking heeft precies dezelfde vorm als de bewegingsvergelijking van de gedwongen rotatieslinger! (Zie paragraaf 12.3.1 en verder.)

De trillingskring wordt beschreven door dezelfde vergelijking als de rotatieslinger:

$$\frac{d^2U_{uit}}{dt^2} + 2\beta\omega_0\frac{dU_{uit}}{dt} + \omega_0^2\,U_{uit} = \omega_0^2\,U_{in} \qquad (12.50)$$

De uitwijkingshoek ϕ van de rotatieslinger van vergelijking 12.26 is hier vervangen door het meetsignaal U_{uit}, de uitwijkingshoek α van de motor is vervangen door de bronspanning U_{in} en de dempingsfactor β en ω_0 zijn anders gedefinieerd, namelijk:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (12.51)$$

en:

$$\beta = \frac{R/L}{2\omega_0} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (12.52)$$

Alle resultaten die we in paragraaf 12.3 hebben verkregen voor de gedwongen rotatieslinger zijn net zo geldig voor de trillingskring. Bij de trillingskring vinden we, als we een sinusvormige ingangsspanning $U_{in}(t)$ aanbieden, net zo'n amplitude- en fase-karakteristiek als bij de gedwongen rotatieslinger (zie figuur 12.9 en 12.10); ook hier is er een resonantiepiek voor $\omega=\omega_M$ met hoogte $1/(2\beta\sqrt{(1-\beta^2)})$ (zie vgl. 12.36 en 12.37) en is Q op dezelfde manier uit de amplitudekarakteristiek te bepalen als in paragraaf 12.3.3 beschreven is.

Anders dan bij de rotatieslinger kunnen we nu grootheden als ω_M en Q uitdrukken in de weerstand, capaciteit en zelfinductie van de componenten:

$$\omega_M = \omega_0\cdot\sqrt{1-2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\frac{R^2}{L^2}} \qquad (12.53)$$

en:

$$Q \approx \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (12.54)$$

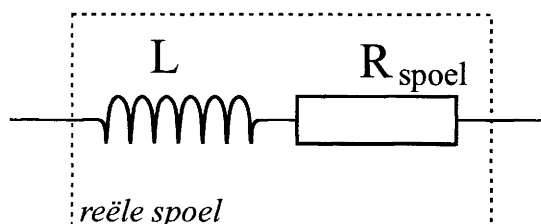
Dit maakt het ons mogelijk de gemeten grootheden te toetsen met behulp van de door de fabrikant opgegeven waarden voor R, L en C.

12.4.2 Metingen aan de elektrische trillingskring

Met een oscilloscoop, waarop de signalen U_{in} en U_{uit} zichtbaar gemaakt kunnen worden kunnen de amplitudekarakteristiek en de fasekarakteristiek opgemeten worden. Q en ω_M kunnen bepaald en vergeleken worden met de theoretisch voorspelde waarden.

Het is goed om hierbij een aantal punten in de gaten te houden:

1. Als ω_0 vastgelegd is door de keuze van de spoel en condensator (L en C liggen dan dus vast), dan wordt de dempingsfactor β bepaald door de grootte van de weerstand R in de kring.
2. De in het schema van figuur 12.11 opgenomen spoel is een *ideale spoel.* Dit is een spoel die alleen een zelfinductie L heeft. In werkelijkheid is het nauwelijks mogelijk om zo'n ideale spoel te creëren, omdat een spoel altijd uit materiaal met een weerstand gewikkeld wordt. *Een reële spoel* bestaat uit een ideale spoel en een weerstand in serie (zie figuur 12.12). Deze weerstand heeft weer zijn invloed op de dempingsfactor, en dus de kwaliteit van de resonantie.



Figuur 12.12

12.5 Appendix: enkele afleidingen

In deze appendix volgt voor de volledigheid de afleiding van de wiskundige resultaten die in dit hoofdstuk gebruikt worden. Ze zijn niet noodzakelijk voor begrip van wat in dit hoofdstuk besproken is of voor de practicumopdracht TN423 of TN426.

12.5.1 Oplossing van de differentiaalvergelijking voor de vrije rotatieslinger

Voor de vrije rotatieslinger hebben we in paragraaf 12.2.1 de volgende differentiaalvergelijking afgeleid:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{d\phi}{dt}+\omega_0^2\cdot\phi=0 \qquad (12.7)$$

Deze differentiaalvergelijking is oplosbaar met behulp van een trucje (zie ook het eerstejaarscollege 'lineaire algebra'). Substitueer namelijk voor ϕ een functie van de vorm:

$$\phi(t)=\phi_0\cdot e^{\lambda\cdot t} \qquad (12.55)$$

Dan is:

$$\frac{d\phi}{dt}=\lambda\cdot\phi_0\cdot e^{\lambda\cdot t}=\lambda\cdot\phi(t) \qquad \text{en:}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}=\lambda^2\cdot\phi_0\cdot e^{\lambda\cdot t}=\lambda^2\cdot\phi(t) \qquad (12.56)$$

Invullen in vergelijking 12.7 geeft:

$$(\lambda^2+2\beta\omega_0\cdot\lambda+\omega_0^2)\cdot\phi(t) = 0 \qquad (12.57)$$

en deze vergelijking kan alleen opgaan als:

$$\lambda^2+2\beta\omega_0\lambda+\omega_0^2=0 \qquad (12.58)$$

Deze vierkantsvergelijking, de zogenaamde karakteristieke vergelijking, kunnen we oplossen met de abc-formule; er zijn twee oplossingen , λ_1 en λ_2, met:

$$\lambda_1=-\beta\omega_0+\omega_0\sqrt{\beta^2-1} \qquad \text{en:}$$

$$\lambda_2=-\beta\omega_0-\omega_0\sqrt{\beta^2-1} \qquad (12.59)$$

Afhankelijk van de waarde van β is het karakter van de oplossing anders; Als $\beta\geq 1$ dan zijn λ_1 en λ_2 reëel en hebben we te maken met een niet periodieke, volgens een e-macht afnemende functie. Als $0<\beta<1$ dan is $(\beta^2-1)<0$ en dus de wortel een imaginair getal λ_1 en λ_2 zijn dan complex, en beter te schrijven als:

$$\lambda_1=-\beta\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\beta^2}=-\beta\omega_0+j\omega_d \qquad \text{en:}$$

$$\lambda_2=-\beta\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\beta^2}=-\beta\omega_0-j\omega_d \qquad (12.60)$$

waarin $j=\sqrt{(-1)}$.

De algemene oplossing van vergelijking 12.7 is een lineaire combinatie van $e^{\lambda 1t}$ en $e^{\lambda 2t}$, dus:

$$\phi(t)=e^{-\beta\omega_0 t}\cdot(A\cdot e^{j\omega_d\cdot t}+B\cdot e^{-j\omega_d\cdot t}) \qquad (12.61)$$

of, als we nieuwe constanten $\phi_0=½(A+B)$ en $\phi_0=½j(B-A)$ definiëren:

$$\phi(t)=e^{-\beta\omega_0 t}\cdot(\phi_0\cdot\cos(\omega_d\cdot t)+\chi_0\cdot\sin(\omega_d\cdot t)) \qquad (12.62)$$

Door een geschikte keuze van het begintijdstip kan men bereiken dat $\chi_0=0$.

12.5.2 Oplossing van de differentiaalvergelijking voor de gedwongen rotatieslinger; amplitude- en fase-karakteristieken

Als ϕ_{hom} de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking 12.7 voor de vrije rotatieslinger is (vanaf nu de *homogene differentiaalvergelijking* genoemd), en ϕ_{part} voldoet aan de differentiaalvergelijking 12.26 van de gedwongen rotatieslinger (de *inhomogene differentiaalvergelijking*) dan voldoet $\phi_{alg}=\phi_{hom}+\phi_{part}$ ook aan de inhomogene differentiaalvergelijking. Immers:

$$\frac{d^2\phi_{a\lg}}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{d\phi_{a\lg}}{dt}+\omega_0^2\phi_{a\lg}=$$

$$\left(\frac{d^2\phi_{\text{hom}}}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{d\phi_{\text{hom}}}{dt}+\omega_0^2\phi_{\text{hom}}\right)+\left(\frac{d^2\phi_{\text{part}}}{dt^2}+2\beta\omega_0\frac{d\phi_{\text{part}}}{dt}+\omega_0^2\phi_{\text{part}}\right)=$$

$$0+\omega_0^2\alpha=\omega_0^2\alpha$$

We bekijken nu de inhomogene differentiaalvergelijking 12 26 met α van de vorm:

$$\alpha(t)=\alpha_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

en we zoeken een oplossing van de vorm:

$$\phi_{part}(t)=\phi_0\cdot\cos(\omega\cdot t+\theta) \qquad (12.33)$$

We kunnen α en ϕ_{part} schrijven als het reële deel van de complexe functies:

$$\hat{\alpha}(t)=\alpha_0\cdot e^{j\omega\cdot t} \quad en{:}\quad \hat{\phi}_{part}(t)=\phi_0\cdot e^{j(\omega\cdot t+\theta)} \qquad (12.63)$$

waarin α_0 en ϕ_0 reëel zijn.

Invullen van deze α en ϕ_{part} in de inhomogene differentiaalvergelijking 12.26 geeft:

$$\phi_0\cdot(j\omega)^2e^{j(\omega t+\theta)}+2\beta\omega_0\cdot j\omega\,\phi_0\cdot e^{j(\omega t+\theta)}+\omega_0^2\cdot\phi_0\cdot e^{j(\omega t+\theta)}=$$
$$\omega_0^2\cdot\alpha_0\cdot e^{j\omega t}$$

Deze gelijkheid geldt voor iedere t, dus ook voor t = 0:

$$\phi_0\cdot e^{j\theta}(-\omega^2+2j\beta\omega\omega_0+\omega_0^2)=\omega_0^2\cdot\alpha_0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\phi_0}{\alpha_0}=\frac{\omega_0^2\cdot e^{-j\theta}}{(\omega_0^2+2j\beta\omega\omega_0-\omega^2)} \qquad (12.64)$$

Aangezien de linkerkant van deze vergelijking reëel is, kunnen we de grootte van ϕ_0/α_0 bepalen door de absolute waarde van de rechterkant te nemen. Dit kan door de rechterkant te vermenigvuldigen met zijn complex geconjugeerde en hieruit de wortel te nemen:

$$\frac{\phi_0}{\alpha_0}=\left[\frac{\omega_0^2\cdot e^{-j\theta}}{(\omega_0^2+2j\beta\omega\omega_0-\omega^2)}\cdot\frac{\omega_0^2\cdot e^{+j\theta}}{(\omega_0^2-2j\beta\omega\omega_0-\omega^2)}\right]^{1/2}=$$
$$\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega\omega_0)^2}} \qquad (12.65)$$

de laatste gelijkheid is om te schrijven naar de amplitudekarakteristiek 12.34 door teller en noemer te delen door ω_0^2.

De fase-karakteristiek vinden we door vergelijking 12.64 links en recht met $e^{j\theta}$ te vermenigvuldigen en te delen door ϕ_0/α_0.

$$e^{+j\theta}=\frac{\omega_0^2\cdot\alpha_0}{(\omega_0^2+2j\beta\omega\omega_0-\omega^2)\cdot\phi_0} \qquad (12.66)$$

Het rechterlid kunnen we in de vorm x+jy schrijven, door onder en boven te vermenigvuldigen met $(\omega_0^2-\omega^2-2j\beta\omega\omega_0)$:

$$e^{+j\theta} = \frac{\omega_0^2 \cdot \alpha_0}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega\omega_0)^2) \cdot \phi_0} \cdot \left((\omega_0^2 - \omega^2) - j(2\beta\omega\omega_0)\right)$$

De faseverschuiving θ is nu het argument arctg(y/x) van het rechterlid:

$$\theta = -\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\beta\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{12.67}$$

hetgeen weer om te schrijven is naar de fasekarakteristiek 12.35 door in het argument van de arctangens teller en noemer te delen door ω_0^2.

12.5.3 Analyse van de amplitudekarakteristiek: bepaling van het maximum en de 3dB-punten

Het maximum van de amplitudekarakteristiek kunnen we bepalen door de afgeleide van de amplitudekarakteristiek 12.64 te nemen en gelijk aan nul te stellen:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0^2 \cdot (4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega_0^2\omega)}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega\omega_0)^2\right]^{-3/2}} = 0 \tag{12.68}$$

Dit betekent dat:

$$-\omega^2 + 2\beta^2\omega_0^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \omega_0\sqrt{1 - 2\beta^2} \tag{12.69}$$

mits $0<\beta<½$. Voor $½<\beta<1$ is er geen oplossing dus ook geen maximum.[10]

De hoogte van het maximum vinden we door deze ω (die dus gelijk is aan ω_M) in te vullen in de amplitudekarakteristiek:

$$\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{max} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2(1-2\beta^2))^2 + 4\beta^2\omega_0^4(1-2\beta^2)}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\beta^4\omega_0^4 + 4\beta^2\omega_0^4 - 8\beta^4\omega_0^4)}} = \frac{1}{2\beta\sqrt{1-2\beta^2}} \tag{12.70}$$

De 3dB-punten vinden we door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{max} \quad \text{of:} \quad \left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\phi_0}{\alpha_0}\right)_{max}^2 \tag{12.71}$$

dus:

$$\frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega\omega_0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\beta^2(1-2\beta^2)} \tag{12.72}$$

dit is om te schrijven tot:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + 2(1-2\beta^2)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + (1-4\beta^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = (1-2\beta^2) \pm 2\beta\sqrt{1-3\beta^2} \tag{12.73}$$

Als het rechterlid bestaat en voor zowel het + als het – teken positief is, dan bestaan ω_{rechts} en ω_{links} en is:

[10] Er is ook een extreem in ω=0; dit is een minimum als $0\le\beta<½$ en een maximum als $\beta\ge½$.

$$\omega_{links}^2 = \omega_0^2\left((1-2\beta^2) - 2\beta\sqrt{1-3\beta^2}\right) \quad \text{en:}$$
$$\omega_{rechts}^2 = \omega_0^2\left((1-2\beta^2) + 2\beta\sqrt{1-3\beta^2}\right) \tag{12.74}$$

zodat:

$$\omega_{rechts}^2 - \omega_{links}^2 = \omega_0^2 \cdot 4\beta\sqrt{1-3\beta^2} \tag{12.75}$$

Aangezien:

$$\omega_{rechts}^2 - \omega_{links}^2 = (\omega_{rechts} + \omega_{links})(\omega_{rechts} - \omega_{links}) \tag{12.76}$$

en omdat ω_{rechts} en ω_{links} aan weerszijden van het maximum liggen is[11]:

$$\omega_{rechts} + \omega_{links} = 2\omega_M = 2\omega_0\sqrt{1-2\beta^2} \tag{12.77}$$

zodat:

$$\Delta\omega \equiv \omega_{rechts} - \omega_{links} = \omega_0^2 \cdot \frac{4\beta\sqrt{1-3\beta^2}}{2\omega_0\sqrt{1-2\beta^2}} \tag{12.78}$$

Dit kunnen we uitdrukken in $Q = 1/(2\beta)$:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \cdot \sqrt{\frac{Q^2 - 3/4}{Q^2 - 1/2}} \tag{12.79}$$

Hiermee wordt:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q\sqrt{\frac{Q^2 - 1/2}{Q^2 - 3/4}} = Q\sqrt{\frac{1 - 1/2Q^2}{1 - 3/4Q^2}} \tag{12.80}$$

Als Q groot is (dus β klein) dan kunnen we benaderen:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - 3/4Q^2} \approx 1 + 3/4Q^2 \tag{12.81}$$

waarmee vergelijking 12.80 gelijk wordt aan:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx Q\sqrt{\left(1 - 1/2Q^2\right)\left(1 + 3/4Q^2\right)} =$$
$$Q\sqrt{\left(1 - 2/4Q^2 + 3/4Q^2 + 6/16Q^4\right)} \approx \tag{12.82}$$
$$Q\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \approx Q\left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) = Q + \frac{1}{8Q}$$

[11] Men kan laten zien dat dit een exacte gelijkheid is.

13 Maatglaswerk

Literatuur
A.I.Vogel, A Textbook of Quantitative Inorganic Analysis, Longmans, 1961.
I.M.Kolthoff, V.A. Strenger, Volumetric Analysis, vol. I, II and III, Interscience Publishers, 1947.

13.1 Inleiding

In de chemie en in de analytische chemie in het bijzonder blijkt het meten van volumina noodzakelijk te zijn. Enkele voorbeelden: bij monstername, bij het bereiden van oplossingen en bij het bepalen van een dichtheid. Er is zelfs een gehele analytische techniek op gebaseerd: de titreeranalyse.

Als eenheid van volume wordt veelal de liter gebruikt. De liter is een niet tot het SI behorende eenheid die echter blijvend erkend is (NEN 1000). De liter is in 1964 exact gelijk gesteld aan de kubieke decimeter.

Er moet goed onderscheid worden gemaakt tussen glaswerk dat bestemd is voor het *bevatten* van een nauwkeurig omschreven volume (bijvoorbeeld een maatkolf) en glaswerk, dat bestemd is voor het *uitleveren* van een nauwkeurig gedefinieerd volume (bijvoorbeeld een buret of een pipet). Volumetrisch glaswerk is geijkt bij een bepaalde temperatuur (meestal 20 °C). Gebruik ervan bij andere dan de aangegeven temperatuur resulteert in afwijkingen van het aangegeven volume. Indien de uitzettingscoëfficiënt van het glas bekend is, kunnen deze afwijkingen berekend worden (zie paragraaf 13.3).

Te gebruiken volumetrisch glaswerk moet schoon zijn. Schoon wil in dit verband in de eerste plaats zeggen: vetvrij. Een glasoppervlak is vetvrij als gedestilleerd water het geheel bevochtigt en er als een film zonder druppelvorming afloopt.

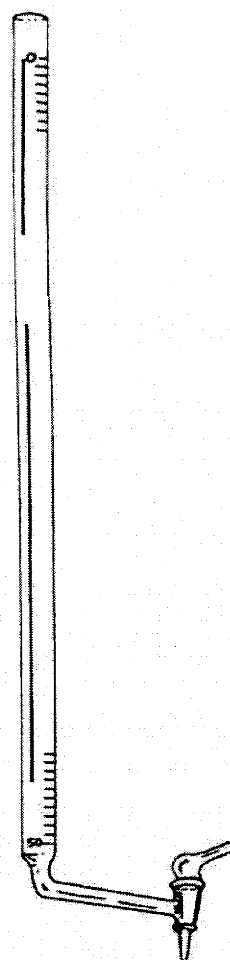
Glaswerk kan men vetvrij maken door het te bewaren in een mengsel van dichromaat/zwavelzuur of in één of ander handelspreparaat. Voor gebruik moet het schoonmaakmiddel verwijderd worden door enkele malen te spoelen met gedestilleerd water.

13.2 Volumetrisch glaswerk en het gebruik ervan

a. De buret
Buretten zijn bedoeld voor het nauwkeurig bepalen van af te geven, variërende volumina. Voor gebruik dienen buretten enkele malen voorgespoeld te worden met de te gebruiken vloeistof. Twee veel gebruikte typen zijn respectievelijk de Schellbachburet en de zuigerburet.

De **Schellbachburet** is een lange cilindrische glasbuis van constante diameter over de lengte die gecalibreerd is. Aan het ondereinde is de buis gesloten d.m.v. een glazen kraan die voorzien is van een uitstroompunt. De zijde van de buis tegenover de calibratie is matwit gemaakt en in het midden voorzien van een verticale blauwe band.

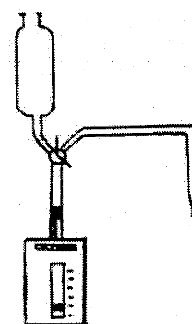
Een glazen kraan van een buret moet worden ingevet door op het slijpstuk van de kraan onder en boven de boring enkele dunne streekjes vet aan te brengen en vervolgens de kraan in het huis even enkele malen rond te draaien totdat er geen strepen meer zichtbaar zijn. Het vullen van de buret moet geschieden tot in de kraan. Bij het aflezen van de buret moet men de positie bepalen van het laagste punt van de meniscus. Hierbij parallax vermijden! Er wordt afgelezen tot op een tiende van een schaaldeel van de calibratie. Voor een 50 ml buret is dit tot op 0,01-0,02 ml. De kleinste dosering die men met een buret van dit type kan bereiken is een halve druppel, d.w.z. een druppel die te klein is om zelf van de buretkraan af te vallen, maar die men tegen de wand van een vat kan aftikken. Het volume van zo'n halve druppel is ongeveer 0,02 ml, zodat men voor een 50 ml buret op een toevallige fout van ± 0,04-0,06 ml komt (twéé keer aflezen).



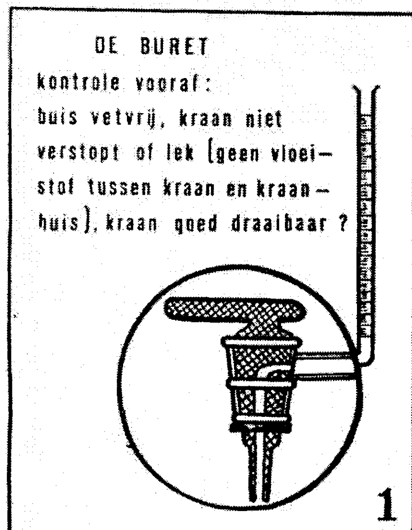
buret 50 ml

Een buret is geijkt op uitloop. Er is dus rekening gehouden met het feit, dat er een vloeistoffilmpje op de buretwand achterblijft. De dikte van dit vloeistoffilmpje hangt echter af van de snelheid, waarmee de buret leegloopt. Bij al te snel uitleveren van vloeistof krijgt men dan ook last van zogenaamde naloop. Als men zeer snel getitreerd heeft, moet men dan ook even wachten voordat men afleest.

De **zuigerburet** bestaat uit een glazen buis van constante diameter, waarin zich een zuiger, aangedreven door een micrometerschroefmechanisme, kan bewegen. Het boveneinde van de buis is afgesloten met een driewegkraan. De bedoeling hiervan is, dat in één stand van deze kraan bij neergaande zuiger de cilinder uit een voorraadvat gevuld kan worden, terwijl in de andere stand bij opgaande zuiger vloeistof uitgeleverd kan worden. De uitlevering geschiedt via een glazen buisje, waarvan de punt is uitgetrokken tot een capillair. Het uiteinde van dit capillair dient zich bij gebruik van de buret onder het vloeistofoppervlak in het titratievat te bevinden. De kleinste dosering wordt nu niet meer begrensd door een minimale druppelgrootte. Wel treden er nu diffusieverschijnselen op aan het einde van de buretpunt. Door gebruik te maken van een zeer nauw capillair is deze diffusie te beperken. Snel titreren is dan echter uitgesloten. Daar de uitlevering van de vloeistof geschiedt door verdringing is er geen sprake van naloop. De zuigerburetten zijn dan ook geschikt voor vloeistoffen met een andere viscositeit dan water. Het aflezen van een zuigerburet geschiedt op de micrometerschroef. Ook hier weer tienden van schaaldelen schatten.



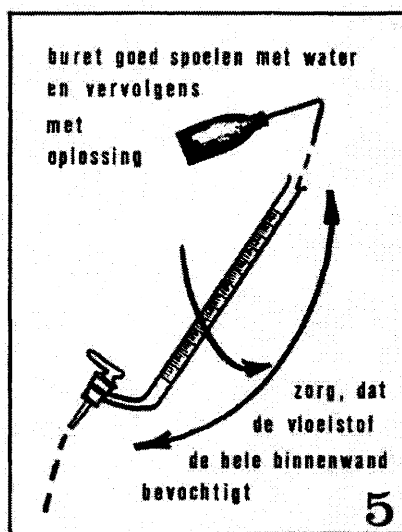
zuigerburet

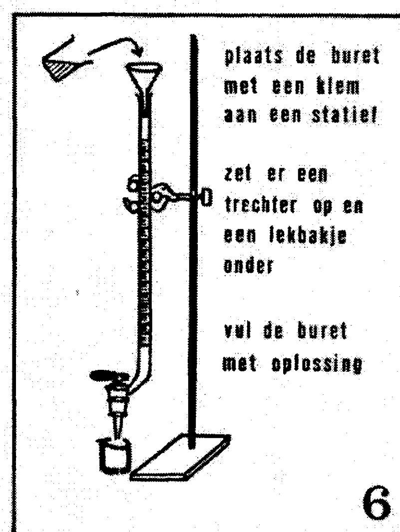

DE BURET
kontrole vooraf:
buis vetvrij, kraan niet verstopt of lek [geen vloeistof tussen kraan en kraanhuis], kraan goed draaibaar ?
1

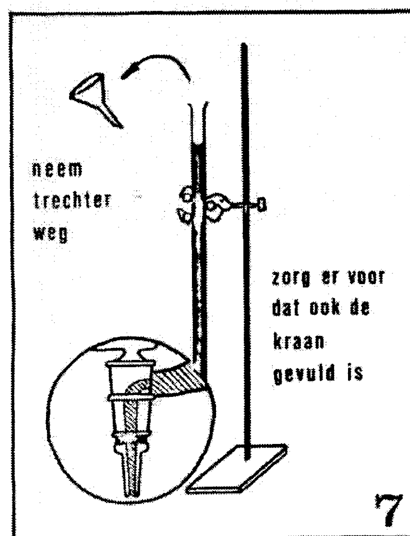

als kraan niet goed werkt:
kraan uit kraanhuis nemen
beide zorgvuldig schoonvegen
2

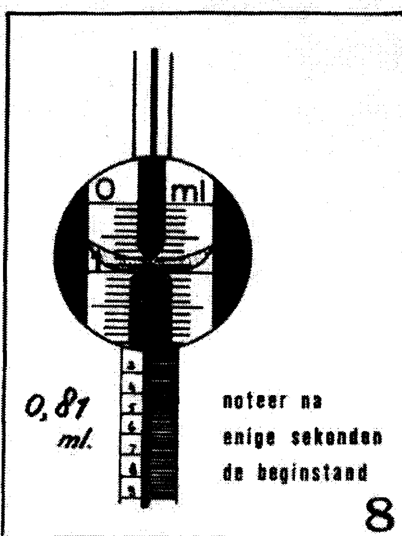

VET
breng
ZEER DUN
twee streepjes
kranenvet aan
3


draai de kraan een paar keer 'rond, zodat het vet zich regelmatig verdeelt
4


buret goed spoelen met water en vervolgens met oplossing
zorg, dat de vloeistof de hele binnenwand bevochtigt
5


plaats de buret met een klem aan een statief
zet er een trechter op en een lekbakje onder
vul de buret met oplossing
6

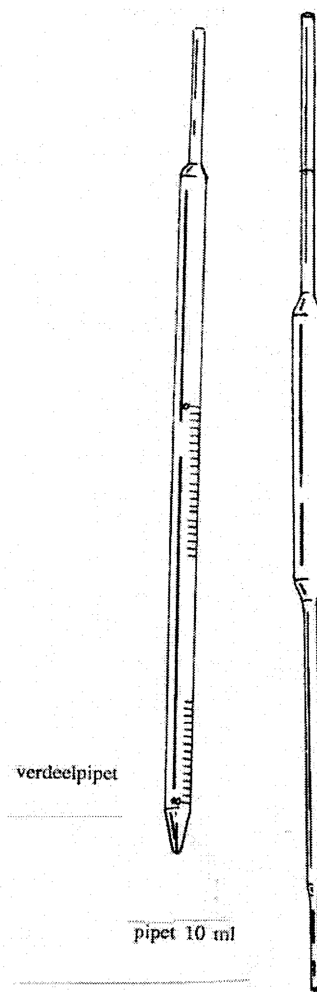

neem trechter weg
zorg er voor dat ook de kraan gevuld is
7


0 ml
0,81 ml.
noteer na enige sekonden de beginstand
8


VÓÓR aflezen van de eindstand aanhangende druppels meenemen
9

b. De pipet

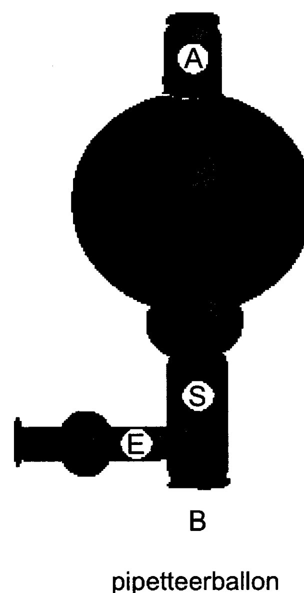
Pipetten zijn evenals buretten bedoeld voor het uitleveren van een gedefinieerde hoeveelheid vloeistof. Er zijn pipetten met één merkstreep (zogenaamde volpipetten) en pipetten, die over vrijwel de gehele lengte zijn gekalibreerd (zogenaamde verdeelpipetten). Gebruik bij het pipetteren altijd een **pipetteerballon**!



Voor het overbrengen van een vast, nauwkeurig gedefinieerd volume gebruikt men de **volpipet** en wel als volgt:

1. Spoel de pipet voor met de betreffende vloeistof.
2. Druk de aanzuigzijde van de pipet in de pipetteerballon bij opening B (zie fig. rechts). Houd de pipet hierbij zo dicht mogelijk bij de pipetteerballon vast om afbreken en snijwonden te voorkomen!
3. Druk met duim en wijsvinger ventiel A in en knijp de ballon leeg.
4. Plaats de pipet in de vloeistof en druk ventiel S in. Hierdoor wordt de vloeistof omhoog gezogen. Laat het ventiel los als de vloeistof ongeveer 2 cm boven de merkstreep staat. Zorg dat er geen vloeistof in de ballon komt!
5. Trek de pipet uit de vloeistof en veeg hem af met absorberend papier
6. Laat door ventiel E in te drukken het vloeistofniveau op correcte wijze (hoek van 45° op de wand van het glaswerk) zakken tot de meniscus op de maatstreep staat.
7. Laat op dezelfde wijze (hoek van 45° op de wand van het glaswerk) de pipet leeglopen in het gewenste vat.
8. Als de pipet is leeggelopen de voor de desbetreffende pipet voorgeschreven nalooptijd aanhouden en daarna de punt van de pipet voorzichtig wegnemen van de glaswand.

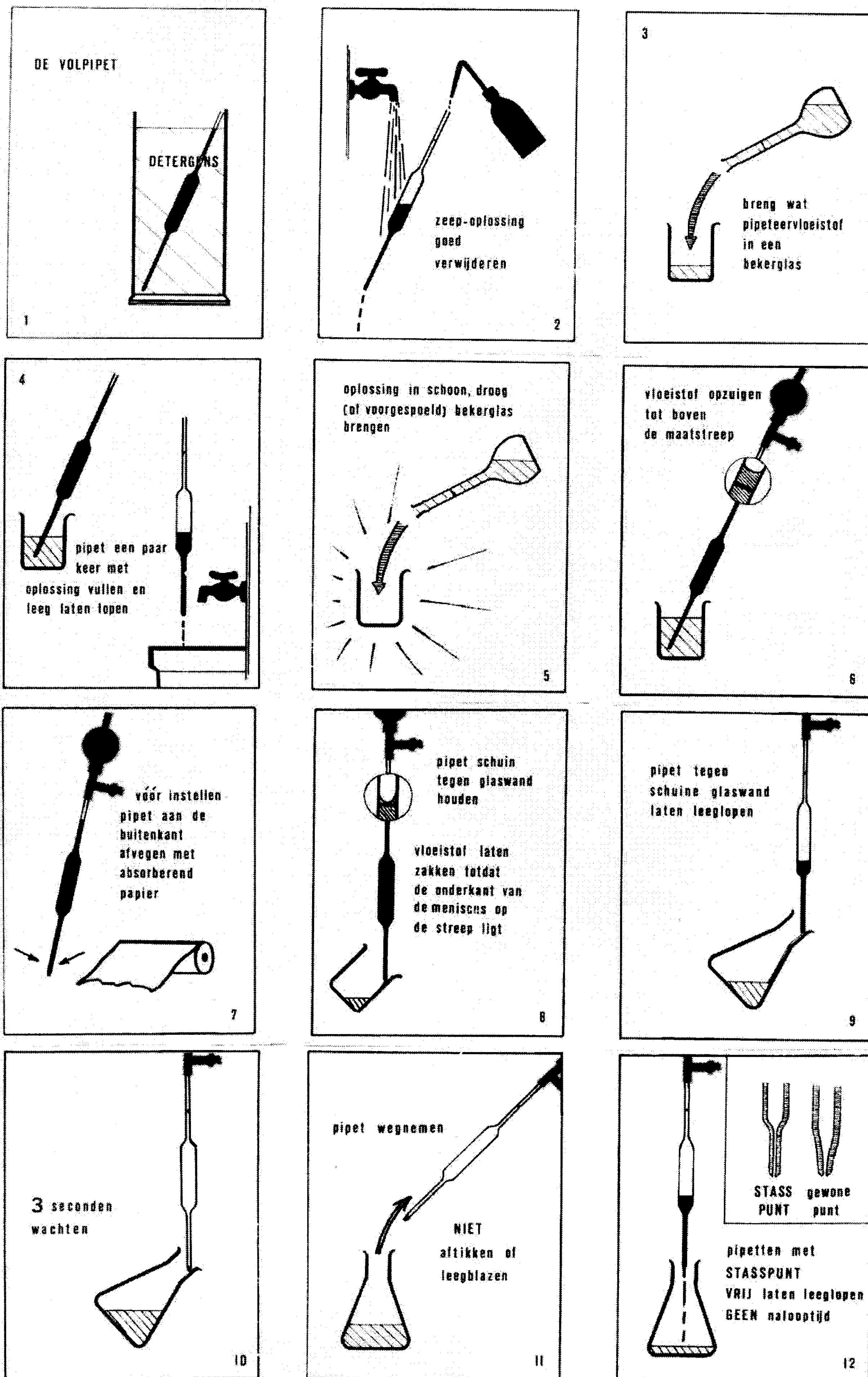
Bij pipetten met een zogenaamde stasspunt laat men de pipet vrij leeglopen, zonder deze in contact te brengen met de wand van het vat waarin gepipetteerd wordt. Ook wordt hier geen rekening gehouden met naloop.



pipetteerballon

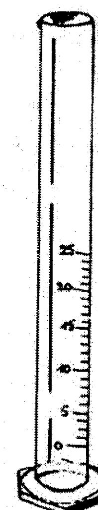
Volpipetten zijn verkrijgbaar in verschillende nauwkeurigheidsklassen: klasse A en klasse B. Voor een 10 ml volpipet klasse A is de tolerantie ±0,02 ml, voor dezelfde pipet klasse B: ±0,04 ml. In paragraaf 13.3 vind je een tabel met de toleranties van pipetten (bron: A.I.Vogel, A Text-book of Inorganic Analysis, 3e editie, Longman, Londen).

Verdeelpipetten zijn geschikt om variërende hoeveelheden vloeistof te doseren. In de regel zijn ze veel minder nauwkeurig dan de volpipetten. Tegenwoordig worden zogenaamde snelooppipetten geleverd, die geen nalooptijd hebben (ze zijn zo geijkt). Ook worden precisiepipetten gebruikt, die 15 seconden nalooptijd hebben.


DE VOLPIPET
DETERGENS
1
zeep-oplossing goed verwijderen
2
3
breng wat pipeteervloeistof in een bekerglas
4
pipet een paar keer met oplossing vullen en leeg laten lopen
oplossing in schoon, droog (of voorgespoeld) bekerglas brengen
5
vloeistof opzuigen tot boven de maatstreep
6
vóór instellen pipet aan de buitenkant afvegen met absorberend papier
7
pipet schuin tegen glaswand houden
vloeistof laten zakken totdat de onderkant van de meniscus op de streep ligt
8
pipet tegen schuine glaswand laten leeglopen
9
3 seconden wachten
10
pipet wegnemen
NIET aftikken of leegblazen
11
STASS PUNT
gewone punt
pipetten met STASSPUNT VRIJ laten leeglopen GEEN nalooptijd
12

c. De maatcilinder

Maatcilinders zijn gekalibreerde vaten van dikwandig glas. Een maatcilinder wordt gebruikt voor het ruwweg afmeten van een volume. Ze zijn in het algemeen geijkt op het bevatten van een volume.



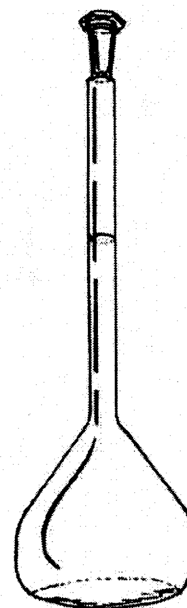
maatcilinder

d. De maatkolf

Een maatkolf is een peervormige kolf met platte bodem, voorzien van een lange nauwe hals. Indien de kolf zodanig met vloeistof is gevuld, dat de onderkant van de meniscus gelijk staat met de merkstreep op de hals, bevat de kolf het aangegeven volume (althans bij de temperatuur, waarbij de kolf geijkt is). Ook maatkolven zijn verkrijgbaar in de klassen A en B. Zo is de tolerantie voor een 100 ml kolf klasse A: ± 0,06 ml, terwijl de tolerantie voor dezelfde kolf klasse B: ± 0,1 ml bedraagt.
In paragraaf 13.3 vind je een tabel met de toleranties van maatkolven (bron: A.I. Vogel, A Text-book of Inorganic Analysis, 3e editie, Longman, Londen).

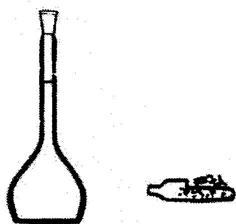
Een maatkolf wordt als volgt gebruikt voor het bereiden van een standaardoplossing:

1. Maatkolf enkele malen voorspoelen met het oplosmiddel
2. Op te lossen stof in de maatkolf brengen (m.b.v. weegschuitje)
3. Stof uit de hals naar beneden spoelen met oplosmiddel en vervolgens zoveel oplosmiddel toevoegen dat de kolf voor ongeveer 1/3 deel is gevuld
4. Hals van de kolf van boven tot de merkstreep ontdoen van oplosmiddel met filtreerpapier, zonder dit papier in contact te brengen met de oplossing beneden in de kolf
5. Kolf omzwenken, totdat de stof is opgelost
6. Kolf met oplosmiddel aanvullen, totdat de onderkant van de meniscus gelijk staat met de merkstreep. Hierbij het gedeelte van de hals boven de merkstreep niet bevochtigen
7. Kolf afsluiten met stop en minimaal 10x omschudden door omkeren.



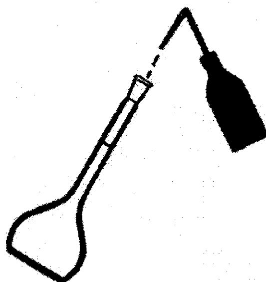
maatkolf

VULLEN VAN EEN MAATKOLF



1

maatkolf uitspoelen met oplosmiddel



2

schone trechter op de kolf plaatsen



zorg er voor, dat bij het vullen de lucht uit de kolf kan ontwijken

3



breng de op te lossen stof m.b.v. spuitfles over in de trechter

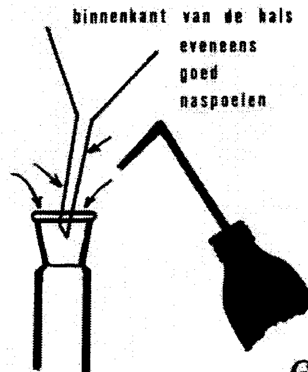
4



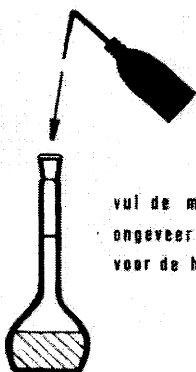
trechter goed naspoelen

5

buitenkant van de tuit en binnenkant van de hals eveneens goed naspoelen



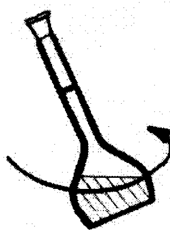
6



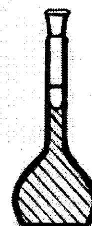
vul de maatkolf ongeveer voor de helft

7

breng door zwenken de stof in oplossing



8



vul de maatkolf tot even onder de streep

9



maak de binnenzijde van de hals droog met een roer-staafje, waaromheen filtreerpapier gewikkeld is

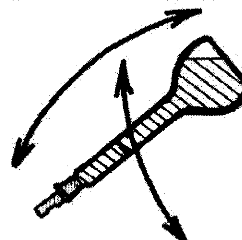
10



vul de maatkolf aan m.b.v. een verdeelpipet tot de meniscus op de streep ligt

11

sluit de maatkolf en homogeniseer de oplossing zorgvuldig. minstens tien keer zwenken!



12

13.3 IJking van volumetrisch glaswerk

Volumetrisch glaswerk kun je ijken door het volume aan vloeistof van bekende dichtheid dat wordt uitgeleverd of dat het glaswerk moet bevatten, te wegen. Zowel pipetten als buretten zijn geijkt voor water. Voor andere vloeistoffen moeten ze opnieuw worden geijkt.
Bij het ijken van maatglaswerk met water met een temperatuur ≠ 20⁰C moet voor de temperatuur gecorrigeerd worden. Voor een gedetailleerde bespreking van de verschillende effecten waarvoor gecorrigeerd moet worden, verwijzen we naar standaardwerken over analytische chemie (o.a. Vogel, Kolthoff). Hieronder vind je een tabel waarin de som van de verschillende effecten zichtbaar gemaakt is (bron: Vogel)

Tolerantie	Capaciteit van de maatkolf (ml)									
± ml	5	10	25	50	100	200	250	500	1000	2000
Klasse A	0.02	0.02	0.03	0.04	0.06	0.1	0.1	0.15	0.2	0.4
Klasse B	0.03	0.03	0.04	0.06	0.1	0.2	0.2	0.3	0.4	0.6

Tabel 13.1 Toleranties van maatkolven

Tolerantie	Capaciteit van de pipet (ml)							
± ml	1	2	5	10	20	25	50	100
Klasse A	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.06
Klasse B	0.02	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.12
uitlooptijd (s)	5-10	7-15	10-20	15-25	15-30	20-35	25-40	30-50

Tabel 13.2 Toleranties van pipetten

Gewicht van water om 1 liter bij 20⁰C te geven

	natronkalkglas ('soda glass') kubieke uitzettingscoëfficiënt 0.000025/⁰C		borosilicaatglas kubieke uitzettingscoëfficiënt 0.000010/⁰C	
Temp. (⁰C)	gewicht (g)	Volume van 1 g water (ml)	gewicht (g)	volume van 1 g water (ml)
15	997.93	1.0021	998.00	1.0020
16	997.80	1.0022	997.86	1.0021
17	997.66	1.0023	997.71	1.0023
18	997.51	1.0025	997.54	1.0025
19	997.35	1.0026	997.37	1.0026
20	997.18	1.0028	997.18	1.0028
21	997.00	1.0030	996.98	1.0030
22	996.80	1.0032	996.78	1.0032
23	996.60	1.0034	996.56	1.00345
24	996.38	1.0036	996.33	1.0037

Tabel 13.3 Temperatuurcorrectie voor maatglaswerk

Voorbeeld
Een tot de ijkstreep gevulde maatkolf van 250 ml van borosilicaatglas blijkt bij weging 249.48 g water te bevatten. De temperatuur van het water is 17^0C. In de tabel is te zien dat 997.71 g water van die temperatuur bij verwarming tot 20^0C een volume van precies 1 liter oplevert. Het volume van de maatkolf bij 20^0C is dus 249.48 * 1000 / 997.71 = 250.05 ml (of 249.48 * 1.0023 = 250.05).

14 Titratie

Literatuur

A.I.Vogel, A Textbook of Quantitative Inorganic Analysis, Longmans, 1961
I.M.Kolthoff, V.A.Strenger, Volumetric Analysis, vol. I,II and III, Interscience Publishers, 1947

14.1 Inleiding

Een titratie bestaat in wezen uit het bepalen van het volume van een reagens van nauwkeurig bekende sterkte, dat nodig is om volledig te reageren met een monster van onbekende sterkte. Deze volumebepaling geschiedt met een buret. Het volledig afgelopen zijn van de reactie wordt door een signaal gemarkeerd. Vaak is dit een visuele markering hoewel tegenwoordig ook veel instrumentele methoden in gebruik zijn voor de eindpuntsdetectie. Slechts in ideale gevallen valt deze markering, het eindpunt van de titratie, samen met het stoechiometrische eindpunt of equivalentiepunt. Indien deze twee punten niet samenvallen, spreekt men van een titratiefout. Deze fout is in sommige gevallen te berekenen.

Sommige chemische reacties zijn bruikbaar voor titrimetrische bepalingen, andere niet. De eisen, waaraan een chemische reactie moet voldoen om bruikbaar te zijn in de titrimetrie zijn:

1. De reactie moet tamelijk snel zijn
2. De reactie moet eenduidig bepaald zijn, dus een bekende stoechiometrie en geen storende nevenreacties
3. De reactie moet duidelijk waarneembaar volledig aflopen.

Titraties kunnen worden ingedeeld naar de soort reactie die erbij gebruikt wordt:

1. *Neutralisatietitraties.*
   Onder neutralisatietitraties rekent men de titraties van vrije basen of zouten van zwakke zuren met een standaardoplossing van zuren (acidimetrie) en de titraties van vrije zuren en zouten van zwakke basen met een standaardoplossing van loog.
2. *Complexvormingtitraties.*
   Bij complexometrische titraties vormen ionen een oplosbaar, vrijwel niet-gedissocieerd complex. Ethyleendiaminotetraazijnzuur (EDTA) is één van de meest gebruikte titrantia bij complexometrische titraties.
3. *Neerslagtitraties.*
   Neerslagtitraties berusten op de vorming van een onoplosbare verbinding.
4. *Redoxtitraties.*
   Tot de redoxtitraties rekent men alle titraties, waarbij een verandering in het oxidatiegetal van de reagerende stoffen optreedt of een overdracht van elektronen tussen de reagerende stoffen optreedt.

14.2 Neutralisatietitraties

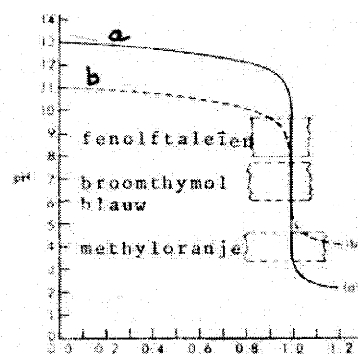
Voor een titratie in water van een sterk zuur met een sterke base ligt het equivalentiepunt bij pH = 7. Het equivalentiepunt van de titratie van een zwak zuur met een sterke base ligt bij een pH hoger dan 7 t.g.v. de protolyse van de gevormde base. Evenzo is de protolyse van de gevormde base er de oorzaak van dat het equivalentiepunt van de titratie van een zwakke base met een sterk zuur beneden pH = 7 ligt. De exacte ligging van het equivalentiepunt van een zuur/base-titratie is te berekenen als de zuurconstanten van de betrokken verbindingen bekend zijn (zie hoofdstuk pH-berekeningen).

Partiële protolyse van de uit het zwakke zuur ontstane base: $MZ = M^+ + Z^-$ en $Z^- + H_2O = OH^- + HZ$
Hoe sterker de protolyse is, hoe groter de pH bij het equivalentiepunt.

De ligging van het eindpunt van een zuur/base-titratie kan op verschillende manieren worden vastgesteld:

1. Door gebruik te maken van indicatoren

Een zuur/base-indicator heeft een kleur, die afhankelijk is van de pH van de oplossing waarin de indicator zich bevindt. De kleurovergang vindt plaats binnen een klein pH-interval. Dit interval noemt men het omslagtraject van de indicator. Zuur/base-indicatoren zijn veelal organische zwakke zuren of basen. Voor een indicator die als zwak zuur is te beschouwen, geldt in water het volgende dissociatie-evenwicht:



Fractie die getitreerd is.

(a) Titratie van 0,100 m NaOH met 0,100 m HCl
(b) Titratie van 0,00100 m NaOH met 0,00100 m HCl



$$H_2O + HIn \overset{K_{HIn}}{\Leftrightarrow} H_3O^+ + In^-$$

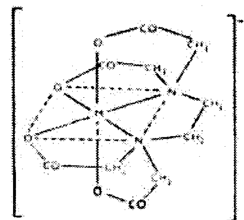
Nu heeft de vorm HIn een kleur die duidelijk verschillend is van de kleur van In-. Voor een zuur/base-titratie moet men een indicator kiezen met een pK die gelijk is aan de pH van het equivalentiepunt. De overgang van de ene kleur naar de andere vindt dan juist rond het equivalentiepunt plaats.

2. Door gebruik te maken van een pH-meter

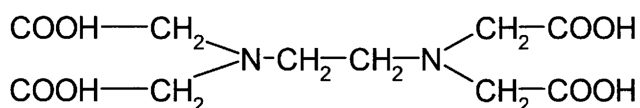
M.b.v. een pH-meter, voorzien van een glas- en referentie-elektrode, kan men de pH van de oplossing gedurende de titratie volgen. Men beëindigt nu de titratie als de pH de waarde van de pH in het equivalentiepunt heeft bereikt. Is de pH van het equivalentiepunt niet bekend (bijvoorbeeld bij de titratie van stoffen, waarvan de dissociatieconstanten niet bekend zijn), dan moet men het verloop van de pH over de gehele titratie opnemen. Het eindpunt is nu het punt waar de verandering van de pH per volume-eenheid titrant toegevoegd, het grootst is.

14.3 Complexometrische titraties

Complexvormingen die veel in titraties worden toegepast zijn de complexvormingen met EDTA en die met kwik(II)-zouten.



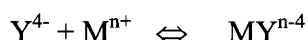
Structuur EDTA



a. EDTA-titraties

Ethyleendiaminotetraazijnzuur (EDTA) vormt met vrijwel alle meerwaardige metaalionen en ook met enkele éénwaardige metaalionen complexen. Onafhankelijk van de waardigheid van het metaal bevatten deze complexen vrijwel altijd het metaal en EDTA in de molverhouding 1:1. EDTA is een vierbasisch zuur, meestal voorgesteld als H_4Y.

Bij een pH hoger dan 10 kan de complexvorming tussen een metaal en EDTA voorgesteld worden als:

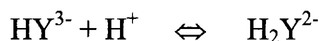


$$Y^{4-} + M^{n+} \Leftrightarrow MY^{n-4}$$

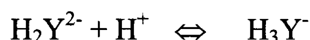
Bij een pH < 10 kunnen de volgende evenwichten mede een rol spelen:



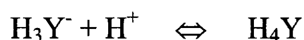
$$Y^{4-} + H^{+} \Leftrightarrow HY^{3-}$$



$$HY^{3-} + H^{+} \Leftrightarrow H_2Y^{2-}$$



$$H_2Y^{2-} + H^{+} \Leftrightarrow H_3Y^{-}$$



$$H_3Y^{-} + H^{+} \Leftrightarrow H_4Y$$

Verlaging van de pH resulteert in een daling van de concentratie van Y^{4-}. Dit betekent dat er minder metaal als complex gebonden wordt. Metalen die zeer stabiele complexen met EDTA vormen, zullen bij lagere pH getitreerd kunnen worden dan metalen met een lagere stabiliteitsconstante van het EDTA-metaalcomplex. Het is zelfs mogelijk in één oplossing verschillende metalen na elkaar te titreren door tussentijds de pH te veranderen. Ook kunnen storende metalen soms onschadelijk gemaakt worden met een zogenaamd maskeringmiddel. Dit maskeringmiddel is zelf ook veelal een complexvormer, speciaal voor het storende metaal.

De eindpuntindicatie van EDTA-titraties verloopt meestal m.b.v. een metaalindicator. Deze indicatoren vormen gekleurde complexen met metalen. Het metaalindicatorcomplex is zwakker dan het EDTA-complex van het te titreren metaal. Tijdens de titratie worden de vrije metaalionen complex gebonden aan EDTA. Tegen het eind wordt het metaal verdrongen uit zijn indicatorcomplex en overgedragen aan het EDTA, waarbij de indicator vrij komt. Daar de vrije indicator een andere kleur heeft dan het metaalindicatorcomplex treedt er een kleurverandering op. De metaalindicatoren zijn echter meestal ook pH gevoelig. Mede vanwege het feit dat de EDTA-metaalcomplexvorming beïnvloedt wordt door de pH is het dus zaak de pH tijdens een EDTA-titratie constant te houden.

b. Mercurimetrische titraties

Kwik(II)-ionen vormen complexen met sommige van de halogeniden. Zo kan bijvoorbeeld chloride met een oplossing van mercurinitraat getitreerd worden:



$$Hg^{2+} + 2\,Cl^- \Leftrightarrow HgCl_2$$

Het eindpunt van de titratie kan worden vastgesteld met de indicator difenylcarbazon. Deze indicator vormt een blauw/violet complex met kwik(II)-ionen.

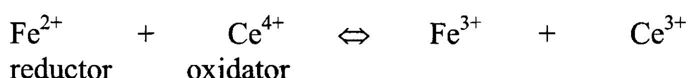
14.4 Neerslagtitraties

Een veelvuldig in neerslagtitraties gebruikte titrant is een oplossing van zilvernitraat. Zilver vormt neerslagen met de halogeniden en thiocyanaat en kan dus gebruikt worden in de titratie van deze stoffen. Het eindpunt van neerslagtitraties kan op verschillende manieren worden bepaald:

1. M.b.v. de vorming van een gekleurd neerslag.
   Aan het monster wordt een indicator toegevoegd, die met overmaat titrant een gekleurd neerslag vormt
2. Door gebruikmaking van de vorming van een oplosbare gekleurde verbinding.
   Aan het monster wordt een indicator toegevoegd die met een overmaat titrant een gekleurde, onoplosbare verbinding vormt
3. M.b.v. adsorptie-indicatoren.
   De werking van adsorptie-indicatoren berust op het feit dat ze bij het equivalentiepunt door het neerslag geadsorbeerd worden. Gedurende dit proces van adsorptie vindt er een kleurverandering van de indicator plaats.

14.5 Redoxtitraties

Bij redoxtitraties wordt gebruik gemaakt van de reacties tussen een oxidatie- en reductiemiddel. Bijvoorbeeld:



$$\underset{\text{reductor}}{Fe^{2+}} + \underset{\text{oxidator}}{Ce^{4+}} \Leftrightarrow Fe^{3+} + Ce^{3+}$$

Enkele veel gebruikte oxidatiemiddelen zijn: kaliumpermanganaat, cerium(IV)sulfaat, kaliumdichromaat en jood. Enkele reductiemiddelen die veel toepassing vinden in de titrimetrie zijn: natriumthiosulfaat en ijzer(II)sulfaat.

Er zijn verschillende methoden om het eindpunt van een redoxtitratie vast te stellen:

1. Gebruik van redoxindicatoren.

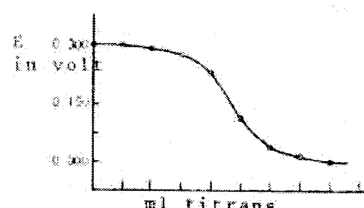
Een redoxindicator is een stof die verschillend gekleurd is in de geoxideerde en de gereduceerde vorm:



$$In_{(ox)} + n \bullet \text{elektronen} = In_{(red)}$$

Bij overmaat oxidatiemiddel heeft de indicator de $In_{(ox)}$-kleur, bij overmaat reductiemiddel de $In_{(red)}$-kleur.

2. Gebruik van potentiometrische methoden.
We meten de oxidatiepotentiaal van een systeem met een Pt-elektrode (indicatorelektrode) en een verzadigde kalomelektrode (referentie-elektrode). Het eindpunt van de titratie is nu het punt, waar de geleverde spanning het sterkst verandert per toegevoegde ml titrant.



3. Gebruik van zelfindicerende methoden.
Bij gebruik van kaliumpermanganaat manifesteert het eindpunt zich door het paars worden van de titratievloeistof. Een zeer geringe overmaat aan kaliumpermanganaat is voldoende om de oplossing te kleuren. Er is dus geen andere indicatiemethode nodig.

14.6 De uitvoering van een titratie

Bij de uitvoering van een titratie dient men te zorgen voor:

- Een goede roering, zodat de indicatie niet achterblijft bij de dosering van titrant
- Minimale doseringen bij het naderen van het eindpunt van de titratie. Het verdient aanbeveling, indien mogelijk, eerst een ruwe titratie van het monster uit te voeren, zodat men bij de volgende titraties weet, wanneer men langzamer moet gaan titreren
- Een juiste hoeveelheid indicator. Te veel indicator geeft merkbaar verbruik van titrant voor de indicator zelf, terwijl te weinig indicator de waarneming van het eindpunt bemoeilijkt
- Het vrij van monster zijn van de wand van het titratievat boven de vloeistofspiegel bij het eindpunt van de titratie
- Hoeveelheid titrant:
  - Niet te veel (iets minder dan inhoud buret);
  - Niet te weinig (wordt te onnauwkeurig).

	HCl	HNO_3	H_2SO_4	H_3PO_4	CH_3COOH	NH_3(aq)
Molmassa (g/mol)	36,4	63,0	98,08	97,99	60,05	17,03
Dichtheid	1,19	1,42	1,84	1,70	1,05	0,90
Massapercentage (%)	37,2	10,0	96,0	85,5	99,8	27
Molariteit	12,1	15,8	18,0	14,8	17,4	14,3

Tabel 14.1 - Molariteiten van gebruikelijke, geconcentreerde zuren en ammonia

15 Conductometrie

15.1 Inleiding

Conductometrie is een methode, waarbij de elektrische geleiding van een oplossing wordt gemeten. Geleiding (symbool *G*) is gedefinieerd als de reciproque van de weerstand (symbool *R*). De bijbehorende eenheid is Ω^{-1}. Officieel heeft deze eenheid de naam 'Siemens', symbool S, maar zij wordt ook wel 'mho' genoemd. Meestal gaat het hierbij om oplossingen in water, maar de methode is ook bruikbaar voor niet-waterige oplossingen, als er maar ladingsdragers (ionen) aanwezig zijn. De elektrische geleiding is afhankelijk van:

1. de aard van de opgeloste stof of stoffen
2. de concentratie van de opgeloste stof of stoffen
3. de aard van het oplosmiddel
4. de lengte en doorsnede van de vloeistofkolom tussen de elektroden
5. de temperatuur

Conductometrie wordt voornamelijk gebruikt voor het meten van concentraties en veranderingen daarin, in oplossingen waarvan de aard van de opgeloste stof bekend is. Daarbij worden de lengte en doorsnede van de vloeistofkolom en de temperatuur dus zoveel mogelijk constant gehouden. Als voorbeelden noemen we:

- Vaststelling van het equivalentiepunt van titraties.
- Meting van de snelheid van chemische reacties als tijdens de reactie ionen ontstaan of verdwijnen.

In oudere literatuur wordt soortelijke (respectievelijk equivalente) geleiding vaak soortelijk (respectievelijk equivalent) geleidingsvermogen genoemd. In plaats van de term geleiding wordt ook geleidbaarheid gebruikt. Volgens de de NEN-norm zijn deze benamingen verouderd.

15.2 Begrippen en formules

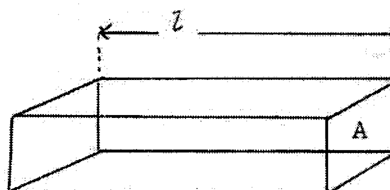
15.2.1 Soortelijke geleiding

De geleiding van een oplossing tussen twee elektroden kan in principe worden bepaald door bij een bepaalde spanning de stroom te meten:

$$G = \frac{I}{V} \qquad (1)$$

(In de praktijk treden hierbij echter complicaties op. Deze worden besproken in par. 15.2.2.)

De geleiding van een oplossing tussen twee rechthoekige (metalen) elektroden (fig. 1) blijkt rechtevenredig te zijn met de grootte van het oppervlak van de elektroden (*A*) en omgekeerd evenredig met de afstand tussen de elektroden (*l*):



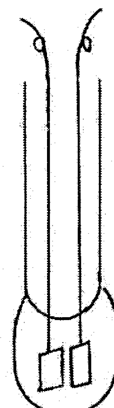
Figuur 1:
Volume-elementje met lengte *l* en oppervlak van doorsnede A.

$$G = \kappa \frac{A}{l} \qquad (2)$$

De evenredigheidsconstante κ (uitspraak: kappa) wordt de *soortelijke geleiding* genoemd. κ is een stofeigenschap die afhankelijk is van de in de vorige paragraaf genoemde punten 1, 2, 3 en 5.

Vraag 1: Welke eenheden heeft κ in het SI-stelsel?

De bepaling van κ is mogelijk door meting van G, als l/A bekend is. Bij bepaling van de soortelijke geleiding van een vloeistof (en de verandering daarin) wordt l/A constant gehouden door te werken met een cel met elektroden die een vaste afstand en een vast oppervlak hebben; zie bijvoorbeeld figuur 2.



Figuur 2: Een cel voor conductometrische bepalingen (geleidbaarheidscel).

Voor een bepaalde cel kunnen we (2) schrijven als:

$$\kappa = G \bullet \text{celconstante} \qquad (3)$$

De celconstante wordt voor een bepaalde cel gevonden door ijking met een oplossing waarvan κ bekend is. Meestal wordt als ijkoplossing een KCl-oplossing gebruikt, omdat hiervan κ met zeer grote nauwkeurigheid bekend is. Is de celconstante van een bepaalde geleidbaarheidscel eenmaal bekend, dan kan de soortelijke geleiding van een willekeurige oplossing berekend worden uit de gemeten geleiding van die cel gevuld met de betreffende oplossing.

concentratie KCl (M)	κ in S cm^{-1}
1,0 M	0,1118
0,10 M	0,01289
0,02 M	0,002768
0,01 M	0,001412

Tabel 15.1 - Soortelijke geleiding van KCl-oplossingen bij 25°C

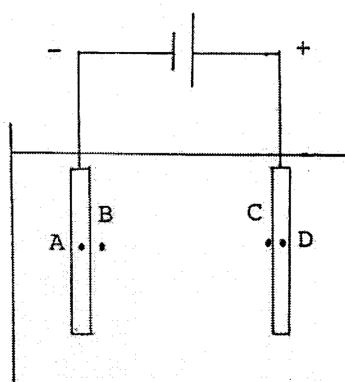
Vraag 2: Welke eenheid heeft de celconstante in het cgs-stelsel? (In de elektrochemie wordt het cm-g-seconde (cgs) stelsel nog veel gebruikt.

Vraag 3: Een geleidbaarheidscel die gevuld is met 0,10 M KCl-oplossing heeft bij 25 °C een geleiding G van 41,05 mS. Als de cel gevuld wordt met 0,01 M azijnzuur, is de geleiding 0,5051 mS bij 25 °C. Bereken κ voor 0,01M azijnzuur (de oplossingen zijn steeds gemaakt met 'conductowater'; de bijdrage daarvan aan de geleiding is te verwaarlozen in dit geval).

15.2.2 Polarisatie

Bij de meting van de geleiding van een vloeistof met gelijkstroom treden storingen op als gevolg van *polarisatie*. Polarisatie berust op concentratieverschillen in de vloeistof, die ontstaan door de chemische reactie bij stroomdoorgang (elektrolyse). Deze hebben een verandering van de metaal-vloeistofpotentiaal tot gevolg, die de gemeten weerstand groter doet lijken dan dat zij in werkelijkheid in de vloeistof is. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld (zie figuur 3).

A en D zijn punten op de elektrode; B en C zijn punten in de vloeistof vlakbij de elektrode. Als vloeistof denken we ons een zuur, bijvoorbeeld zoutzuur. Beide elektroden zijn van platina.
Tussen A en B treedt een potentiaalsprong op van $V_A - V_B$ $(= E_1)$; tussen C en D treedt een potentiaalsprong op van $V_C - V_D$ $(= E_2)$. Het potentiaalverschil tussen A en D is:



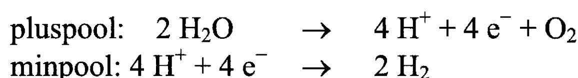
Figuur 3: Geleidbaarheidscel in een oplossing.

$$V_A - V_D = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_D)$$

Het potentiaalverschil tussen B en C volgt uit de wet van Ohm zodat we voor het potentiaalverschil tussen A en D kunnen schrijven:

$$V_A - V_D = E_1 + IR + E_2$$

Bij gelijke elektroden in een oplossing die overal dezelfde concentratie heeft, is $E_1 = -E_2$ (volgens de formule van Nernst). Als er bovendien geen stroom loopt, is $V_A - V_D = IR = 0$; er treedt dan geen polarisatie op.
Om de weerstand te kunnen meten, moet er echter stroom door de oplossing vloeien. Tengevolge van die stroom treden bij ons voorbeeld de volgende chemische reacties op aan de elektroden:


pluspool: $2\,H_2O \rightarrow 4\,H^+ + 4\,e^- + O_2$
minpool: $4\,H^+ + 4\,e^- \rightarrow 2\,H_2$

Door de doorvoering van stroom ontstaan dus concentratieverschillen aan de elektroden; bij de pluspool neemt de H^+-concentratie en de druk van O_2 toe, bij de minpool neemt de H^+-concentratie juist af, terwijl daar de druk van H_2 toeneemt. Door de verschillen in concentratie zijn E_1 en $-E_2$ nu niet meer aan elkaar gelijk. De positieve respectievelijk negatieve pool worden met een laagje O_2, respectievelijk H_2-gas overdekt en gaan daardoor zelf als element werken; er ontstaat een tegen-EMK.
Een extra complicatie is nog dat de gasbellen het elektrodeoppervlak verkleinen, waardoor aanvoer (diffusie) van ionen belemmerd wordt en de concentratieveranderingen versterkt worden. Zoals eerder gezegd, is het resultaat van polarisatie, dat de gemeten weerstand van de oplossing R niet gelijk is aan V/I; de wet van Ohm geldt niet, als er polarisatie optreedt.

Om polarisatie zo veel mogelijk tegen te gaan, gebruikt men wisselspanning. Hierbij wordt (bij ons voorbeeld) de reactie $H^+ + e^- \rightarrow \frac{1}{2} H_2$ voortdurend afgewisseld met $\frac{1}{2} H_2 \rightarrow H^+ + e^-$; zo blijven de concentratieverschillen minimaal. Een verdere maatregel om polarisatie tegen te gaan is het werken met een lage stroomdichtheid. Bij een hoge stroomdichtheid zou de omzettingsgraad ter plaatse erg groot worden, zodat de diffusie (ofwel aanvoer van nieuwe ionen) achter gaat lopen en er concentratieverschillen ontstaan. Een groot elektrode-oppervlak verlaagt, bij gelijkblijvende stroomsterkte, de stroomdichtheid en gaat dus polarisatie door concentratieverschillen tegen. Het oppervlak van de elektrode wordt aanzienlijk vergroot door het te bedekken met Pt-zwart (zeer fijn verdeelde platina).

Om polarisatie zoveel mogelijk tegen te gaan, worden conductometrische metingen dus uitgevoerd bij een niet te grote stroomdichtheid en bij een groot elektrode-oppervlak, met gebruikmaking van wisselspanning.

15.2.3 De equivalente geleiding van een elektrolyt

Voor veel verdunde waterige oplossingen is de soortelijke geleiding *ongeveer* evenredig met de concentratie van het elektrolyt; zie als voorbeeld voor de evenredigheid, en de afwijkingen daarin, tabel 15.1 (κ van KCl als functie van de concentratie).
(Bij veel toepassingen van conductometrie wordt gebruik gemaakt van deze evenredigheid in eerste benadering, en worden de verderop vermelde afwijkingen verwaarloosd).
Om de soortelijke geleiding op gemeenschappelijke concentratiebasis te kunnen vergelijken, is een nieuwe grootheid geïntroduceerd: *de equivalente geleiding* Λ (uitspraak: lambda) van een elektrolyt. Λ wordt gedefinieerd door:

$$\Lambda = \kappa / c^* \qquad (4)$$

c^* is de concentratie in eq cm^{-3}; Een equivalent van een elektrolyt komt overeen met het aantal mol vermenigvuldigd met de absolute waarde van het aantal eenheidsladingen van het ion met de hoogste lading. Zo komt bijvoorbeeld 1 mol KCl overeen met 1 equivalent, 1 mol $MgSO_4$ met 2 equivalenten en 1 mol Na_3PO_4 met 3 equivalenten.

Λ en κ zijn in cgs-eenheden. Eenheid (cgs) van Λ: S cm^2 eq^{-1}

Vraag 4: Hoe wordt formule (4) als Λ en κ zijn uitgedrukt in cgs-eenheden, en voor c^* als maat equivalent per liter wordt gebruikt?

De equivalente geleiding is evenals de soortelijke geleiding een functie van de aard van het oplosmiddel en de opgeloste stof, temperatuur *en* van de concentraties. De evenredigheid van Λ en c geldt namelijk slechts voor verdunde elektrolytoplossingen en dan nog 'ongeveer'.
Dus $\Lambda = \Lambda(c) = \Lambda_c$.

Bij alle elektrolyten blijkt Λ toe te nemen bij verdunning; bij sterke elektrolyten enigszins, bij zwakke elektrolyten in sterke mate. Op de verklaringen van dit verschijnsel gaan wij niet verder in; zij worden besproken bij het vak fysische chemie en zijn te vinden in fysisch-chemische leerboeken.

De limietwaarde van Λ wordt *equivalente geleiding bij oneindige verdunning* (Λ_0) genoemd.

15.2.4 Additiviteit van equivalente geleidingen

De equivalente geleidingen bij oneindige verdunning voldoen aan de volgende additiviteitsregel:

$$\Lambda_0(AB) = \Lambda_0(AC) + \Lambda_0(DB) - \Lambda_0(DC) \qquad (5)$$

bijvoorbeeld:

$$\Lambda_0(KCl) = \Lambda_0(KBr) + \Lambda_0(NaCl) - \Lambda_0(NaBr)$$

Deze regel kan ook als volgt worden geformuleerd: voor sterke elektrolyten geldt:

$$\Lambda_0(AB) = \lambda_0(A^+) + \lambda_0(B^-) \qquad (6)$$

bijvoorbeeld:

$$\Lambda_0(KCl) = \lambda_0(K^+) + \lambda_0(Cl^-)$$

(De equivalente geleiding van ionen wordt meestal met de kleine letter λ geschreven).

Wij gaan hier niet verder in op de manier waarop de absolute waarde λ_0 bepaald is. Enkele waarden van λ_0 voor verschillende ionsoorten vind je in tabel 2. Een vollediger tabel vind je o.a. in het Handbook of Chemistry and Physics.

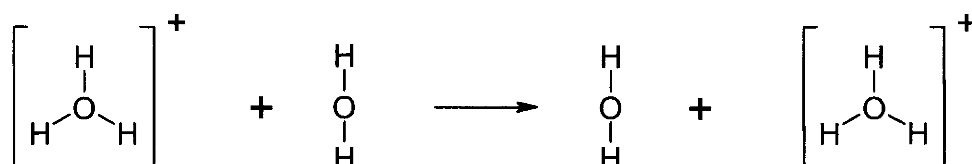
Vraag 5: Bereken met de gegevens uit tabel 2 Λ_0 voor HCl, NaCl en NaOH.

Vraag 6: De soortelijke geleiding van een verzadigde oplossing van AgCl in water bedraagt $2{,}71 \cdot 10^{-6}$ S cm^{-1}. De soortelijke geleiding van water bij deze temperatuur is $1{,}26 \cdot 10^{-6}$ S cm^{-1}. Bereken (mede m.b.v. gegevens uit tabel 2) het oplosbaarheidsproduct van AgCl.

Ionsoort	**λ_0 (S cm^2 eq^{-1}) bij 25 °C**
H^+	349,8
Li^+	38,7
Na^+	50,1
K^+	73,5
Ag^+	61,9
½ Mg^{2+}	53,1
½ Ca^{2+}	59,5
½ Ba^{2+}	63,6
Cl^-	76,3
Br^-	78,4
I^-	76,8
OH^-	198,0
NO_3^-	71,4
½ SO_4^{2-}	79,9
Ac^-	41

Tabel 15.2: Gemeten waarden van de equivalente geleidingen bij oneindige verdunning van de afzonderlijke ionen

Bij beschouwing van tabel 15.2 blijken de waarden van Λ_0 voor de verschillende ionsoorten onderling niet erg te verschillen. De waarden voor H^+-ionen en OH^--ionen wijken alleen nogal sterk af van de anderen. De grote equivalente geleiding van H^+ wordt toegeschreven aan de bijzondere aard van het mechanisme voor het iontransport van H^+. H^+-ladingen worden doorgegeven via de vorming van waterstofbruggen.



Voor OH^- geldt een analoge verklaring. Zoals verwacht kan worden, zijn de waarden van λ afhankelijk van de temperatuur. Als vuistregel kan worden aangenomen dat bij 1 °C temperatuurverhoging, λ_0 stijgt met 1 à 2%.

15.3 De meting

15.3.1 De meting van de geleiding

De eenvoudigste manier om de geleiding van een oplossing te meten is met een 2-elektrode-cel. Over twee vlakke metaalplaatjes die in de oplossing worden ondergedompeld wordt een wisselspanning aangelegd en de stroom wordt gemeten.
Nauwkeuriger metingen worden uitgevoerd met een 4-elektrode-cel. Deze bevat twee aandrijfelektrodes die wisselstroom leveren, wat resulteert in een elektrisch veld in de cel. De elektrische veldsterkte wordt gemeten met de twee meetelektrodes. De elektronica van de conductometer regelt nu de wisselstroom zodanig dat de elektrische veldsterkte een vaste (zeer lage) waarde heeft. De grootte van de wisselstroom is dan evenredig met de geleiding van de oplossing. Doordat de elektrische veldsterkte bij de meetelektroden zeer klein is, en doordat de stroom door de meetelektroden eveneens zeer klein is, worden fouten door polarisatie (zie 5.2.2) bij deze meetmethode grotendeels geëlimineerd.

15.3.2 De geleidbaarheidscel

Al naar gelang de toepassing vindt men zeer verschillende modellen van de geleidbaarheidscel, bijvoorbeeld voor metingen in geroerde of ongeroerde systemen, in stromende vloeistoffen, in zeer kleine monsters vloeistof, enz. De elektroden zijn vrijwel altijd van platina; het oppervlak is bedekt met platinazwart (zie § 15.2.2). Dit is zeer kwetsbaar zodat de elektroden niet mogen worden aangeraakt (bijv. om ze te drogen). Voor precisiewerk is het soms nodig de oppervlakken opnieuw te platineren; voor voorschriften hiervoor wordt verwezen naar de handboeken. Als ze niet in gebruik zijn, bewaart men de elektroden in gedestilleerd water. De celconstante wordt bepaald m.b.v. een oplossing met bekende κ bij constante temperatuur; meestal wordt hiervoor KCl gekozen. Gegevens over de soortelijke geleiding van KCl in verschillende concentraties bij verschillende temperaturen vind je o.a. in het Handbook of Chemistry and Physics en in Vogel's Textbook of Inorganic Chemistry. In veel laboratoria is het gebruikelijk de eenmaal bepaalde celconstante op de meetcel aan te geven. Overigens is het lang niet altijd nodig de celconstante te kennen, omdat bij veel conductometrische bepalingen men niet geïnteresseerd is in de absolute waarde van de geleidbaarheid, maar alleen in de veranderingen die daarin optreden. Noteer de celconstante altijd wel; als je van meetcel wisselt (wat op practica nogal eens kan gebeuren), dan kun je de metingen onderling nog steeds vergelijken.

15.3.3 Enkele mogelijk storende factoren

a. Verontreinigingen in de oplossing

Oorzaak	**remedie**
Voor de meting geleidbaarheidscel en/of ander glaswerk niet zorgvuldig genoeg schoongemaakt.	De geleidbaarheidscel zeer zorgvuldig spoelen na een meting (en voor de volgende). Ook ander glaswerk zorgvuldig reinigen. Bij een serie metingen (bijvoorbeeld ijking) van lage naar hoge concentraties werken.
CO_2 uit de lucht komt in de oplossing.	Snel werken, oplossing niet aan de lucht laten staan.
Oplossingen gemaakt met water dat ionen bevat.	Tweemaal gedestilleerd water gebruiken. Bij oplossingen met lage geleidbaarheid corrigeren voor de geleiding van de 'blanco'.

b. Temperatuurafhankelijkheid van de geleiding (zie § 15.2.4)

c. Onvoldoende roeren

(bijvoorbeeld bij een conductometrische titratie), waardoor de vloeistof bij de elektroden een andere samenstelling heeft dan elders in de oplossing.

d. Slecht functioneren van het instrument.

Oorzaken van slecht functioneren van het instrument, zoals slechte contacten, onvoldoende aarding e.d., en de remedies hiervoor, worden meestal besproken in de handleiding van het instrument waar je mee werkt.

16 Lichtabsorptiemetingen

16.1 Inleiding

Wanneer elektromagnetische golven materie treffen, kunnen de navolgende interacties alleen, of in combinatie optreden:

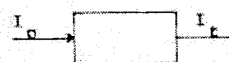
- Gehele of gedeeltelijke reflectie
- Gehele of gedeeltelijke absorptie
- Gehele of gedeeltelijke doorlating.

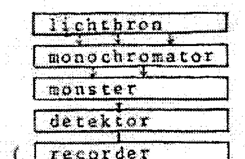
Wat er precies gebeurt, hangt af van de golflengte enerzijds, en het type materie anderzijds.

Golflengte wordt aangeduid met λ en heeft eenheid m. Er geldt: $\lambda = c/\nu$. Hierin is ν de frequentie in s^{-1} (of Hz) en c de lichtsnelheid in m/s.

Wat de golven betreft, beperken we ons hier tot het zichtbare deel van het elektromagnetische spectrum, met golflengten lopend van 800 nm voor het nabije infrarood tot 300 nm voor het nabije ultraviolet. Elektromagnetische golven (straling) zijn karakteriseerbaar door de golflengte (λ) of de frequentie (ν) en de intensiteit (I). Wat de materie betreft, beperken we ons hier tot oplossingen in de vloeistoffase. De genoemde interacties leiden nu tot een tweetal verschijnselen:

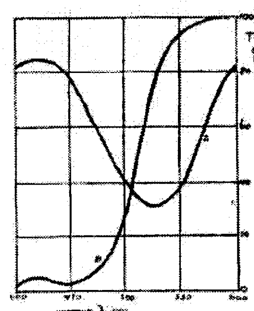
a. Bepaalde stoffen (in oplossing) absorberen voor hen karakteristieke golflengten
b. De hoeveelheid geabsorbeerde straling bij een bepaalde golflengte bedraagt een fractie van de ingestraalde intensiteit; deze fractie kan verschillen van golflengte tot golflengte c.q. frequentie tot frequentie.





Het meten van deze verschijnselen kan gebeuren met een spectrofotometer, een instrument dat in principe tenminste bevat: een lichtbron (voor levering van allerlei golflengten van het zichtbare licht), een monochromator (prisma, rooster of combinatie hiervan voor het kiezen van een golflengte, eigenlijk: een nauw begrensd golflengtegebied), een detector voor meting van de intensiteit, en soms ook een recorder. Een spectrofotometer voor zichtbaar licht met een eenvoudige monochromator of alleen een filter wordt colorimeter genoemd.

M.b.v. de detector kunnen we telkens bij iedere frequentie aflezen wat de intensiteit van de doorgelaten straling is. Doorlopen we zo het gehele gebied van het zichtbare licht, dan kunnen we onze waarnemingen in tabelvorm of grafiekvorm verwerken. Het resultaat heet een *absorptiespectrum*, dat is een weergave van geabsorbeerde stralingshoeveelheden als functie van de frequentie (of golflengte).



A = $KMnO_4$, 12 µg Mn ml^{-1}
B = $Cr_2O_7^{2-}$, 200 µg Cr ml^{-1}

Absorptiespectrum van $KMnO_4$ en $Cr_2O_7^{2-}$

Twee gangbare maten voor de stralingsabsorptie zijn de transmissie (*T*) en de extinctie (*E*, in het Engels *A* voor absorbance). Onder de transmissie verstaan we de verhouding van de straling na en voor doorgang door het monster. De intensiteit van de doorgelaten straling wordt dan vaak als percentage van de ingestraalde intensiteit weergegeven. Onder de extinctie wordt verstaan de tien-logaritme van de reciproke transmissie, het nut van deze in eerste instantie wat vreemd aandoende grootheid wordt duidelijk bij de afleiding van de wet van Lambert-Beer.

Er geldt voor de transmissie:

$$T = \frac{I_t}{I_0} \qquad T(\%) = \frac{I_t}{I_0} * 100\,\%$$

Voor de extinctie geldt:

$$E = {}^{10}\log T^{-1} = {}^{10}\log \frac{I_0}{I_t}$$

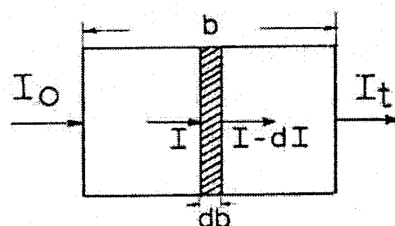
Het verband tussen extinctie en transmissie is dus als volgt:

$$E = {}^{10}\log \frac{100}{T(\%)} = -{}^{10}\log T$$

Een absorptiespectrum kan met betrekking tot a. *kwalitatief* gebruikt worden ter identificatie van een stof. Het verschijnsel onder b. genoemd, geeft mogelijkheden tot *kwantitatief* gebruik van het absorptiespectrum, zoals in het navolgende zal worden toegelicht.

16.2 De wetten van Lambert en Beer

Laten we eens kijken wat er gebeurt als licht met een bepaalde golflengte door een monster valt. We bekijken een oneindig dunne laag met dikte dl loodrecht op de lichtstraal. De intensiteit van het licht dat op deze laag valt, noemen we *I*. De intensiteit is een grootheid die evenredig is met het aantal fotonen dat per seconde op een oppervlakte-eenheid van de laag valt. De laag absorbeert fotonen, dus de intensiteit van de lichtstraal na doorgang zal dus zijn verminderd tot *I* - *dI*.



Deze aanname is geenszins vanzelfsprekend en kan alleen gerechtvaardigd worden als de experimentele conclusies die uit de aanname volgen deze bevestigen.

Welke factoren bepalen nu hoeveel fotonen geabsorbeerd worden, dus de grootte van *dI*?

Het lijkt redelijk om aan te nemen dat het aantal geabsorbeerde fotonen rechtsevenredig is met:

1. Het aantal fotonen dat de laag binnentreedt (ofwel met de intensiteit, I)
2. De concentratie (c) van de absorberende moleculen in de laag
3. De dikte van de laag dl
4. De constante a' die afhangt van de stof en de golflengte, en die altijd experimenteel bepaald zal moeten worden

Deze factoren zijn als volgt samen te vatten: $-dI = a' \cdot c \cdot I \cdot dl$

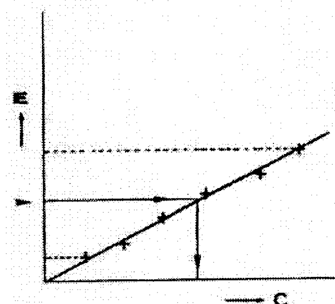
Bij een bepaalde golflengte en een concentratie kunnen we integreren over de hele lengte van de weg door het monster. Het resultaat is de geïntegreerde vorm van de wet van Lambert-Beer (Lambert onderzocht de invloed van l, Beer de invloed van c).

$$E = {}^{10}\log \frac{I_0}{I_t} = \varepsilon \cdot l \cdot c$$

De grootheid E is de extinctie (dit betekent uitdoving; de engelse term is absorbance), die erg nuttig is omdat ze direct evenredig is met de concentratie. De grootheid l, de monsterlengte wordt opgegeven in cm. De grootheid c, de concentratie wordt opgegeven in mol/l. De grootheid ε moet derhalve de eenheid $l \cdot mol^{-1} \cdot cm^{-1}$ hebben en heet met deze eenheden *molaire extinctiecoëfficiënt.*

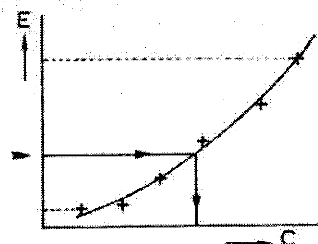
Als we E uitzetten als functie van c (bij constante l) verwachten we op theoretische gronden een rechte met richtingscoëfficiënt εl. Treedt dit inderdaad op, dan is dit een goede rechtvaardiging voor de aanname dat het aantal geabsorbeerde fotonen rechtevenredig is met I_0 en c.

Deze evenredigheid van de extinctie (E) met de concentratie (c) geeft de kwantitatieve mogelijkheid om concentraties te bepalen door meting van E, bij bekende ε en l. Daartoe is het nodig om een ijklijn te vervaardigen. Het is daarvoor van groot belang, dat de absorptiemetingen altijd geschieden bij het absorptiemaximum, omdat de nauwkeurigheid dan het grootst is.



Concentratiebepaling m.b.v. spectofotometer.

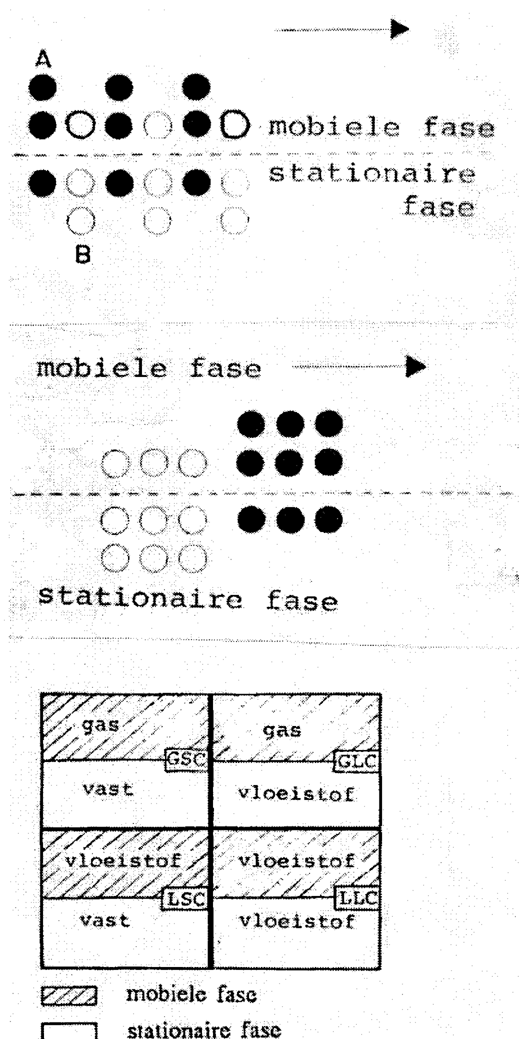
Een serie metingen van E als functie van c levert ons een aantal punten op in een grafiek, door de hierbij best aansluitende rechte te trekken, kunnen we ook ε (eventueel l) bepalen. De rechte betekent in feite dat voor het gebied bepaald door de meetpunten de wet van Lambert-Beer mag worden toegepast, maar ook niet meer. Extrapolaties van enige omvang zijn derhalve niet toegestaan!



Het is niet ondenkbaar dat in praktische proeven de ideale rechte ijklijn niet verkregen wordt, d.w.z. dat de wet van Lambert-Beer dan niet mag worden toegepast. Het is dan wel mogelijk een vloeiende curve te trekken door de meetpunten, waardoor een *ijkcurve* ontstaat, die weer gebruikt kan worden voor concentratiebepalingen *binnen* het meetgebied.

17 Gaschromatografie

17.1 Chromatografie in het algemeen



In de chemie heeft men vaak te maken met mengsels van stoffen. Vooral in de organische chemie kan men zeer ingewikkelde mengsels verwachten. De chromatografie is een methode de waarmee zulke mengsels snel gescheiden kunnen worden. Aan de hand van een modelvoorstelling kunnen we toelichten hoe de scheiding tussen een tweetal componenten A en B van een mengsel tot stand komt. De moleculen van beide stoffen worden voorgesteld door bolletjes. We brengen nu de stoffen in contact met twee fasen, die niet met elkaar mengen. De ene fase blijft op zijn plaats en wordt daarom *stationaire* fase genoemd; de andere beweegt en heet *mobiele* fase. De stof A (zwarte bolletjes) bevindt zich naar verhouding meer in de mobiele fase dan stof B (witte bolletjes). Men kan ook zeggen: B wordt sterker opgelost in (of geadsorbeerd aan) de stationaire fase dan A. De mobiele fase voert de deeltjes die daarin voorkomen met zich mee, waardoor de verdeling van beide componenten over de twee fasen wordt verstoord. De opgeloste deeltjes krijgen meer gelegenheid in de mobiele fase te komen, de meegevoerde deeltjes hebben stroomafwaarts meer kans in de stationaire fase opgenomen te worden. Dit proces herhaalt zich vele keren voor beide stoffen, onafhankelijk van elkaar. Daardoor verplaatsen beide componenten zich in de richting waarin de mobiele fase stroomt. Echter, stof A gaat sneller dan B, omdat relatief meer deeltjes van A in de mobiele fase voorkomen. Op deze wijze worden de componenten gescheiden en kunnen afzonderlijk waargenomen en eventueel opgevangen worden na het passeren van de stationaire fase.

De stationaire fase kan een vaste stof of een vloeistof zijn, de mobiele fase kan vloeibaar of gasvormig zijn. Hierdoor zijn een viertal combinaties van de stationaire en de vloeibare fase mogelijk, die met de gebruikelijke afkortingen in onderstaand schema zijn vermeld.

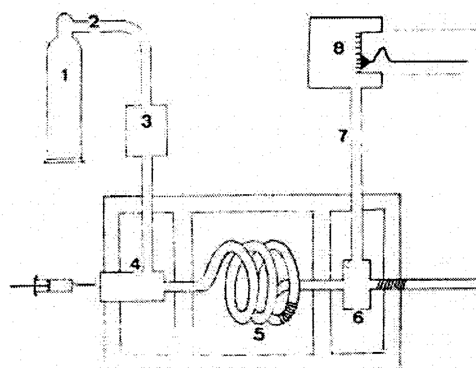
1. GSC (Gas Solid Chromatography)
2. GLC (Gas Liquid Chromatography)
3. LSC (Liquid Solid Chromatography)
4. LLC (Liquid Liquid Chromatography)

In de gevallen 1 en 2 is de mobiele fase gasvormig en spreekt men van *gaschromatografie*. Deze combinaties worden het meest toegepast en zullen meer uitgebreid worden behandeld. In de gevallen 3 en 4 spreekt men van *vloeistofchromatografie*. Dit wordt toegepast, wanneer men bijvoorbeeld te maken heeft met hoogkokende stoffen of wanneer de te onderzoeken stoffen kwetsbaar zijn bij verhoogde temperatuur. Voorbeelden van vloeistofchromatografie zijn: papierchromatografie (LLC), dunnelaag-chromatografie en kolomchromatografie (beide LSC).

17.2 Gaschromatografie

17.2.1 Principe

Gaschromatografie berust op de verdeling van de componenten van een mengsel tussen een mobiele gasfase en een stationaire fase in een scheidingskolom. Soms is de stationaire fase een vaste stof, die ten opzichte van de componenten verschillende adsorptie-affiniteiten bezit (GSC). Meestal is de stationaire fase echter een vloeistof met zeer geringe vluchtigheid, die wordt aangebracht op een fijnkorrelig inert dragermateriaal of direct op de wand van een kolom met zeer geringe diameter (GLC). De stationaire fase heeft een groot contactoppervlak met de mobiele fase, het draaggas. De te scheiden componenten moeten bij de temperatuur, waarbij de scheiding wordt uitgevoerd, voldoende vluchtig zijn. Daarom ligt de werktemperatuur meestal boven de kamertemperatuur.



Figuur 3:
Belangrijkste onderdelen van een gaschromatograaf.

De scheiding kan gebaseerd zijn op kookpuntsverschillen tussen de componenten of (mede) op verschil in polariteit het laatste kan optreden, indien de stationaire fase polaire eigenschappen bezit. In figuur 3 worden de belangrijkste onderdelen van een gaschromatograaf aangegeven. Een gelijkmatige stroom draaggas wordt geleverd door een *gasfles* met reduceerventiel en *stroomregelaar* (3). De meest gebruikte gassen zijn H_2, He en N_2, soms ook Ar en CO_2. Het gas stroomt door een *injectiesysteem* (4) waar het te scheiden mengsel in de gasstroom kan worden gebracht. Omdat dit mengsel meestal vloeibaar is en nog verdampt moet worden, is het injectiesysteem verwarmd. Aansluitend passeert het mengsel de *kolom* (5), waar het in de verschillende componenten wordt gescheiden.

De kolom bestaat uit een roestvrij stalen of koperen (soms glazen) buis, meestal gevuld met een inerte drager waarop de (vloeibare) stationaire fase is aangebracht. De kolom is in een thermostaat geplaatst, opdat een gunstige scheidingstemperatuur kan worden gekozen. Zodra de componenten de kolom verlaten, worden ze waargenomen door een detector (6). Deze meet een fysische grootheid, bijvoorbeeld de warmtegeleidbaarheid van het doorstromende gasmengsel en geeft hiermee een elektrisch signaal af, dat evenredig is met de concentratie van de meegevoerde component of met de absolute hoeveelheid (indien een vlamïonisatiedetector wordt gebruikt: zie ook § 17.2.2.) van de component in het draaggas. De recorder registreert het elektrisch signaal als functie van de tijd, waardoor het *gaschromatogram* (8) ontstaat. De mate van scheiding van elk tweetal opeenvolgende componenten is afhankelijk van

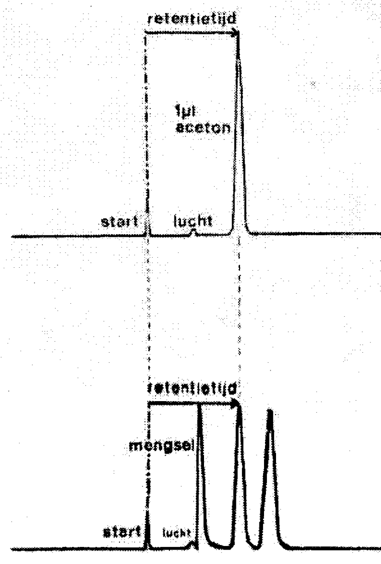
twee factoren: de breedte van de uittredende pieken en de tijd die verloopt tussen het uittreden van de pieken.

17.2.2 Uitvoering

Voor het inbrengen van een mengsel gebruikt men een speciale *injectiespuit*. De naald hiervan wordt door een rubber schijfje gestoken, dat zich na de injectie weer sluit. Men injecteert meestal 0,1 à 1 µl, zelden meer dan 10 µl. Het injecteren verloopt als volgt: eerst wordt de spuit gespoeld met de te injecteren vloeistof; voor kwantitatief werk dient men luchtbellen te vermijden door de naaldpunt in de vloeistof te steken en de plunjer circa tienmaal snel op en neer te halen; vervolgens zuigt men een aaneengesloten kolommetje vloeistof op, meer dan nodig is, en duwt men de plunjer terug tot de gewenste stand is bereikt; daarna veegt men de naald vluchtig af met absorberend papier en trekt men de plunjer een stukje terug; de hierbij opgezogen lucht voorkomt voortijdige verdamping van de vloeistof in het injectiesysteem. De naald wordt nu rustig door het rubberen septum geduwd en zover mogelijk naar binnen gestoken. Duw de plunjer snel in en trek de naald snel terug. Op deze wijze geschiedt het injecteren reproduceerbaar (1%). Nadat het te analyseren monster in zeer korte tijd in de draaggasstroom is gebracht, wordt het mengsel door deze gasstroom meegenomen op zijn weg door de kolom, waar de scheiding tot stand komt. Bij het verlaten van de kolom passeren de verschillende componenten de *detector* die continu een fysische grootheid meet; naar de aard van deze grootheid onderscheidt men de volgende, in de GLC toegepaste detectoren:

- De *katharometer*, die op veranderingen in het warmtegeleidingsvermogen van het uit de kolom tredende gas reageert; de verandering is evenredig met het verschil in elektrisch geleidingsvermogen tussen het draaggas en de meegevoerde component + draaggas; het verschil is evenredig met de concentratie van de component in het draaggas.
- In de *vlamïonisatiedetector* (FID) verbranden de met het draaggas meegevoerde stoffen in een vlammetje van H_2 en O_2 en vormen daarbij ionen. Daarbij neemt de elektrische geleidbaarheid van de vlam evenredig toe met de absolute hoeveelheid van de component in het draaggas.
- De *elektron-capture detector* (ECD) is gebaseerd op het principe dat moleculen met elektronegatieve groepen (in dampvorm) de neiging bezitten vrije elektronen op te nemen. De elektroneninvangdetector kan toegepast worden bij componenten zoals halogeen-, zwavel-, nitro- en carbonylverbindingen.

In alle drie gevallen wordt de verandering, die door de detector wordt gemeten, m.b.v. een elektrisch circuit omgezet in een potentiaalverschil. Het detectorsignaal wordt als functie van de tijd geregistreerd door een mV-recorder. Teneinde de uitslag binnen het bereik van de recorderschaal te houden, kan het signaal verzwakt (katharometer) of versterkt (FID, ECD) worden. Het resultaat is het chromatogram.
De tijd die verloopt tussen de injectie en het moment, waarop de piek zijn hoogtepunt heeft bereikt, noemt men retentietijd.



Figuur 4:
Chromatogram voor een mengsel van drie componenten.

17.2.3 Theorie van de scheiding

Verdelingswet van Nernst

De scheiding tussen twee stoffen komt in de chromatografie tot stand, doordat de stoffen zich in ongelijke mate verdelen over de mobiele en de stationaire fase. Door de verdelingswet van Nernst is het mogelijk een meer kwantitatief beeld van deze verdeling te krijgen. Het verschil in affiniteit ten opzichte van twee fasen kan worden uitgedrukt door de verdelingsconstante K_v. Men brengt bijvoorbeeld in een systeem van twee niet mengbare vloeistoffen 1 en 2 een hoeveelheid van een stof A die in beide vloeistoffen oplost. In de evenwichtstoestand vindt men:

$$K_v = \frac{[A]_1}{[A]_2}$$

$[A]_1$ = concentratie van stof A in fase 1;
$[A]_2$ = idem in fase 2;
K_v = de verdelingsconstante of evenwichtsconstante, welke afhangt van de aard van de betrokken stoffen en van de temperatuur.

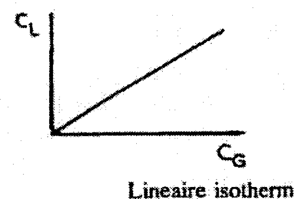
Vragen

1. Wat verandert er in de verdeling over de beide fasen als we tweemaal zoveel van stof A nemen?
2. Voor I_2 in een water-tetra-systeem geldt bij 25°C: K_v = 100 (I_2 lost in tetra beter op dan in water). Als in een mengsel van 1 liter water en 1 liter tetra 0,1 mol I_2 wordt opgelost, wat is dan de $[I_2]_{water}$ en de $[I_2]_{tetra}$?
3. In een mengsel van 1 liter water en 10 ml tetra wordt 0,001 mol I_2 opgelost. Hoeveel mol bevindt zich na instellen van het evenwicht in de tetralaag?

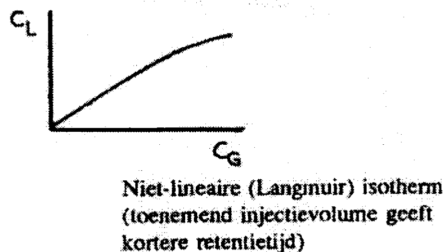
Antwoorden

2. $[I_2]_{water}$ = 1/101 * 0,1 mol/l en $[I_2]_{tetra}$ = 100/101 * 0,1 mol/l;
3. Hoeveelheid = 5 * 10^{-4} mol.

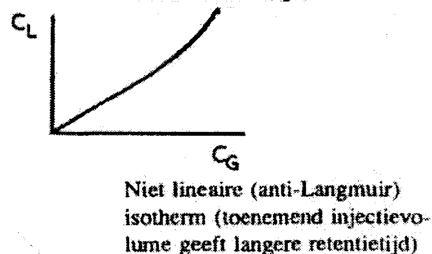
Verschillende stoffen bezitten meestal een verschillende waarde voor K_v. Hiervan wordt in de chromatografie gebruik gemaakt. In de praktijk komen afwijkingen van de verdelingswet van Nernst voor. Dit is te zien in de figuur op deze pagina, voor de verdeling van een stof over vloeistoffase (met concentratie C_L) en gasfase (met concentratie C_G). Bij niet-lineaire isothermen wordt de retentietijd afhankelijk van het injectievolume.



Lineaire isotherm



Niet-lineaire (Langmuir) isotherm (toenemend injectievolume geeft kortere retentietijd)



Niet lineaire (anti-Langmuir) isotherm (toenemend injectievolume geeft langere retentietijd)

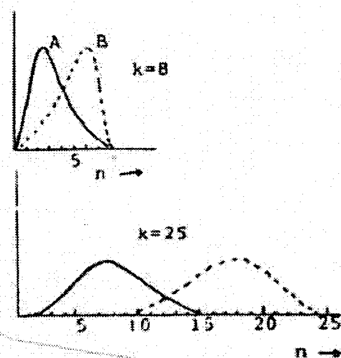
Het tot stand komen van een scheiding

Zodra men de K_v van een stof kent, kan men met deze formule berekenen hoe de verdeling van de stof over de twee fasen zal zijn en hoe snel de stof verplaatst wordt in de mobiele fase. We zullen de gevonden verdeling van stof A met K_v = 2 nu vergelijken met die van stof B, waarvoor K_v = ½ (fase 1 de mobiele, fase 2 de staande fase). In het linkerdeel van de figuur op de volgende bladzijde staan naast elkaar de histogrammen (voor de overzichtelijkheid benaderd door continue lijnen) voor beide stoffen na 8 respectievelijk 25 elementaire scheidingsprocessen (respectieve-

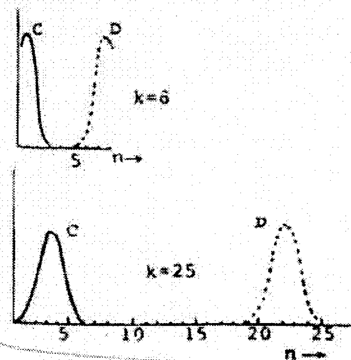
lijk tijdseenheden in een continu proces). In het rechterdeel van de figuur op de volgende bladzijde is hetzelfde gedaan voor twee stoffen C en D met K_v = 10 respectievelijk 0,1. We kunnen aan deze grafieken duidelijk een aantal trends aflezen:

1. Wanneer we in de bovenfase twee stoffen met een verschillende K_v oplossen, worden deze twee stoffen gedurende het proces gescheiden
2. Deze scheiding is beter, naarmate het proces langer duurt
3. De scheiding is beter naarmate de waarden van K_v meer verschillen
4. De pieken zijn scherper naarmate de K_v verder van 1 ligt
5. Naarmate het proces langer duurt, worden de pieken lager en breder.

Door een juiste keuze van de stationaire fase kunnen nauw verwante verbindingen gescheiden worden. Als vuistregel geldt, dat apolaire verbindingen, zoals koolwaterstoffen, gescheiden kunnen worden met apolaire stationaire fasen, bijvoorbeeld een hoogvacuümvet of siliconen-



Verdeling van stof A en stof B over de bovenfase van de buizen.
K_v = 2 resp. ½.



Verdeling van stof C en D over de bovenfase van de buizen.
K_v = 10 resp. 0,1.

olie. Polaire verbindingen, zoals alcoholen en amines, kan men goed scheiden met een polaire stationaire fase, bijvoorbeeld polyethyleenglycol.

17.3 Kwalitatieve en kwantitatieve analyse m.b.v. GLC

17.3.1 Kwalitatieve gaschromatografie

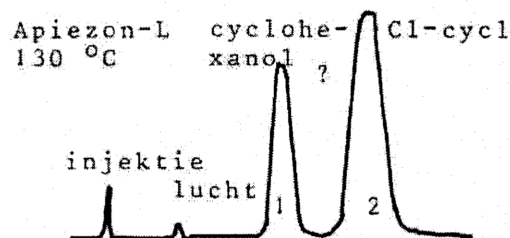
De plaats van de piek in het chromatogram wordt meestal opgegeven als de (bruto-) retentietijd; dit is de tijd, die verstrijkt tussen het moment van injectie en het moment, waarop de piek zijn maximale waarde heeft bereikt. Ook de draaggasstroom heeft een zekere tijd nodig om van het injectiepunt naar de detector te stromen. Men noemt dit de dode tijd t_0. De tijd, welke een component in de stationaire fase doorbrengt, is de nettoretentietijd t_r'; deze is gelijk aan:

$$t_r' = t_r - t_0$$

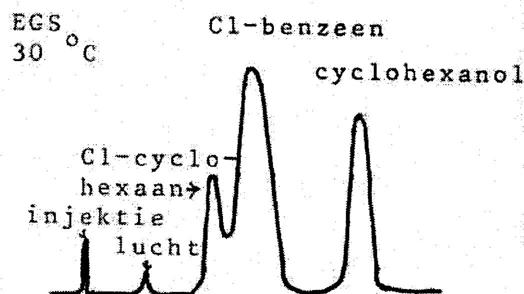
(t_0 is gelijk aan de tijd, die verloopt tussen het moment van injectie en het moment, waarop de luchtpiek verschijnt). Zolang de proefomstandigheden (kolomtemperatuur, gassnelheid, massa-% stationaire fase) voor een bepaalde scheiding dezelfde blijven, heeft elke component een vaste retentietijd. De retentietijd van een bekende verbinding kan dus gebruikt worden om een onbekende component te identificeren. Echter meerdere verbindingen kunnen onder de gekozen proefomstandigheden dezelfde retentietijd hebben. De GLC als zodanig, levert geen structuurbewijs, maar wel een indicatie dat een bepaalde component aanwezig is.

De additiemethode

Heeft men het vermoeden dat een onbekende component X gelijk is aan de bekende verbinding A, dan kan men een kleine hoeveelheid van stof A toevoegen aan het mengsel met de onbekende X; na injectie van het nieuwe mengsel vergelijkt men het chromatogram hiervan met dat van het oorspronkelijke mengsel. Blijkt op de plaats van piek X een (relatief) grotere piek voor te komen, dan hebben A en X, onder overigens identieke omstandigheden, dezelfde retentietijd. Men heeft dan een *aanwijzing*, dat X dezelfde verbinding is als A; dit is echter *géén bewijs*. Herhaling van deze proef op een tweede kolom (met andere polariteit) kan de aanwijzing versterken. Ter illustratie nemen we het volgende voorbeeld. Een mengsel met chloor-cyclohexaan bevat vermoedelijk tevens cyclohexanol. Het mengsel wordt gescheiden, met en zonder toevoeging van cyclohexanol op een (apolaire) Apiezon-kolom; in beide gevallen zijn twee pieken zichtbaar (fig. 6a): de eerste piek is waarschijnlijk cyclohexanol, de tweede piek is afkomstig van chloor-cyclohexaan, maar piek 1 kan ook afkomstig zijn van bijvoorbeeld chloorbenzeen, dat onder de gegeven omstandigheden op precies dezelfde plaats blijkt te verschijnen.



Figuur 6a.



Figuur 6b.

Daarom wordt deze analyse nogmaals uitgevoerd met een ander kolomtype, bijvoorbeeld met een meer polaire stationaire fase zoals DEGS (diethyleenglycolsuccinaat). Chloorbenzeen zal op de DEGS-kolom eerder uittreden dan cyclohexanol, zoals blijkt uit het chromatogram van een synthetisch mengsel van chloorbenzeen, cyclohexanol en chloor-cyclohexaan (figuur 6b). Wanneer nu het chromatogram van het mengsel met de onbekende stof weer twee pieken overeenkomend met die van chloorbenzeen en cyclohexanol te zien geeft, dan is het vermoeden, dat de ene piek van cyclohexanol afkomstig is, gerechtvaardigd. Een bewijs is hiermee echter niet geleverd.

17.3.2 De retentie-index methode

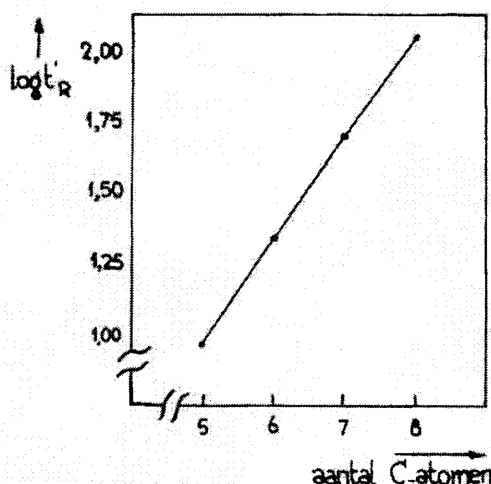
Daar de retentietijd verandert als de proefomstandigheden niet precies dezelfde blijven, wordt vaak gebruik gemaakt van de relatieve retentie *r*:

$$r = \frac{t'_{r,x}}{t'_{r,referentiestof}}$$

Bezwaren hiertegen zijn echter, dat r bij overgang van een apolaire op een polaire kolom weinig verandert als de te onderzoeken stof X en de referenties of beide apolair of beide polair zijn. Voorts is de meetfout groot als de nettoretentietijd van beide stoffen veel verschilt. De retentie-index (Kováts-index) komt aan genoemde bezwaren tegemoet. De retentie-index I is gedefinieerd volgens:

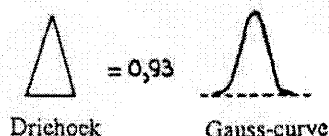
$$I = \frac{\log t'_x - \log t'_z}{\log t'_{z+1} - \log t'_z} * 100 + 100\,z$$

Hierin is t'_x de nettoretentietijd van de onbekende component X en t'_z respectievelijk t'_{z+1} de nettoretentietijd van een n-alkaan met z respectievelijk z+1 koolstofatomen We voeren dus een logaritmische interpolatie uit. De log t'_r-schaal is hierbij arbitrair zo gekozen dat de log van de nettoretentietijd van een alkaan met z koolstofatomen gelijkgesteld is aan 100 z. De keuze van de logschaal is gebaseerd op het lineaire verband tussen log t'_r en het aantal C-atomen van een homologe reeks (zie figuur 7).



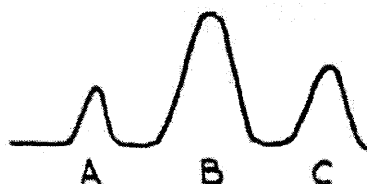
Figuur 7:
Verband tussen logt_R' en het aantal koolstofatomen voor n-pentaan t/m n-octaan.

De waarde van I hangt af van de polariteit van de component en van de polariteit van de kolom. De retentie-index van polaire stoffen op een polaire kolom is dus altijd groter dan op een apolaire kolom. Er bestaan in de literatuur tabellen waarin de Kovàtsindices van diverse verbindingen gegeven zijn op basis van een bepaald kolomtype (zie o.a. R. Kaiser, Chromatografie in der Gasphase, deel III).



Door de experimenteel bepaalde waarde van I voor een onbekende component te vergelijken met literatuurwaarden verkrijgt men een aanwijzing over de identiteit van de betrokken stof.

De GLC levert echter geen bewijs voor de aanwezigheid van een bepaalde verbinding; voor het gebruik van GLC als kwalitatieve analyse methode dient men zoveel mogelijk gebruik te maken van reeds ter beschikking staande gegevens. Eventueel kan men na de scheiding andere methoden toepassen om een onbekende component te identificeren, bijvoorbeeld door deze component na het



$A_A + A_B + A_C = 100\%$

verlaten van de kolom af te zonderen door 'uitvriezing' en vervolgens een IR-spectrum en/of massaspectrum op te nemen. Deze methoden zijn wel geschikt het bewijs voor de structuur van de onbekende stof te leveren.

17.3.3 Kwantitatieve gaschromatografie

Bij een ideale detector is de uitslag van de recorder op ieder moment evenredig met de concentratie (of de absolute hoeveelheid van de component in het draaggas). Integreert men dus de recorderuitslag over de tijd gedurende welke de component de kolom uittreedt, dan heeft men een maat voor de geïnjecteerde hoeveelheid van deze component. Voor kwantitatieve bepalingen gebruikt men daarom het oppervlak van een piek. Het oppervlak A kan worden bepaald m.b.v. een elektronische integrator, een planimeter of door de piek uit te knippen en het papier te wegen. In de praktijk past men ook wel de volgende formule toe:

$$A = h \cdot b_{\frac{1}{2}}$$

waarin h de piekhoogte en $b_{\frac{1}{2}}$ de breedte op halve hoogte van de piek is.

Relatieve methoden

De eenvoudigste relatieve methode voor kwantitatieve analyse m.b.v. GLC is gebaseerd op de aanname, dat de gevoeligheid S voor alle componenten gelijk is. In dit geval verhouden de piekoppervlakken zich als de bijbehorende gewichtshoeveelheden stof.

Voor het massapercentage Q_X van een component X geldt dan:

$$Q_i = \frac{A_i}{\sum_i A_i} \cdot 100\%$$

Hierin is A_x het oppervlak van piek X en $\sum_i A_i$ de som van alle oppervlakken.

Een verfijning kan worden aangebracht als men de gevoeligheid S_X van de detector voor elke component X kent. In dit geval geldt voor de hoeveelheid (massa) van elke component:

$$m_x = \frac{A_x}{S_x}$$

en voor het massapercentage van deze component in het mengsel

$$Q_x = \frac{m_x}{\sum_i m_i} \cdot 100\%$$

S_x = "sensitivity" = = cm² oppervlak per gram stof.

We kunnen nu de *ijkfactor* f_X invoeren: $f_x = S_x^{-1}$.

Dan geldt voor de hoeveelheid van elke component

$$m_x = f_x A_x$$

De ijkfactor is dus de waarde, waarmee het oppervlak wordt vermenigvuldigd om de corresponderende gewichtshoeveelheid te bepalen.
Voor het massapercentage van X in het mengsel geldt nu

$$Q_x = \frac{f_x A_x}{\sum_i f_x A_x} \cdot 100\%$$

De verhouding tussen de ijkfactoren kan berekend worden door een mengsel te injecteren met bekende massapercentages Q_1', Q_2', ... Q_i' van de componenten X_1, X_2, ... X_i en de bijbehorende oppervlakken A_1', A_2' ... A_i' te bepalen; dan geldt

$$Q_1' : Q_2' : \ldots : Q_i' = f_1 A_1' : f_2 A_2' : \ldots : f_i A_i'$$

waaruit volgt

$$f_1 : f_2 : \ldots : f_i = \frac{Q_1'}{A_1'} : \frac{Q_2'}{A_2'} : \ldots : \frac{Q_i'}{A_i'}$$

Bij deze berekeningen wordt verondersteld, dat alle componenten van het mengsel een (afzonderlijke) piek in het chromatogram te zien geven. Voorts is er vanuit gegaan, dat de ijkfactor van een verbinding onafhankelijk is van zijn geïnjecteerde hoeveelheid. Dit geldt echter uitsluitend zolang de concentratie van deze verbinding in de detector een bepaalde, maximale waarde niet overschrijdt; boven dit maximum gaat het lineaire verband tussen hoeveelheid stof en detectorsignaal niet meer op. Het maximum hangt af van het type detector en zijn constructie. Het is bij deze kwantitatieve wijze van werken altijd gewenst om ongeveer evenveel van het ijkmengsel te injecteren als van het te onderzoeken mengsel in verband met eventuele afwijkingen van het lineaire verband (ook bij zeer lage concentraties van een bepaalde component). De verhouding van de piekoppervlakken in het chromatogram levert bovendien nog informatie om de onderlinge gewichtsverhouding van de componenten zinvol te kiezen. Bezwaar van de relatieve methode is dat het oppervlak van *alle* pieken berekend moet worden, dus ook die pieken, waarin men niet is geïnteresseerd.

Absolute methoden

A. Het specifieke oppervlak
Stel dat de injectie V µl van een stof met dichtheid ρ een oppervlak A geeft, dan geldt:

$$A = a \cdot V \cdot \rho$$

Hierin is a het zogenaamde specifiek oppervlak, dit is het oppervlak per gewichtshoeveelheid stof. Deze a is evenredig met S ($a = S$ indien het signaal van de detector *niet* versterkt of verzwakt wordt). Wanneer een onbekende hoeveelheid m_x µg van een component X een oppervlak A_x geeft, dan geldt:

$$m_x = \frac{A_x}{a_x}$$

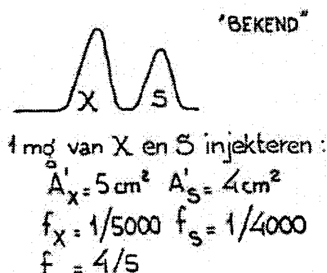
Wil men deze vergelijking gebruiken voor de berekening van hoeveelheden in een mengsel, dan moeten de geïnjecteerde volumina van de zuivere stof en het mengsel zeer nauwkeurig bekend en reproduceerbaar zijn. Verder zijn voorwaarden, dat de zuivere stof beschikbaar is en dat de proefomstandigheden tijdens het scheidingsproces gelijk zijn bij de injectie van het mengsel en de zuivere component. Opgemerkt dient te worden dat het i.h.a. beter is om van de ijkstof ongeveer even veel te injecteren, als van de component in het mengsel. Ook al zou dan het lineaire concentratiegebied van de detector overschreden worden, dan worden de afwijkingen geëlimineerd, omdat het bij de bepaling gaat om de verhouding van de detector signalen. Bij de bepaling van *sporen* van een stof in een mengsel kan de injectie van zeer kleine hoeveelheden ijkstof problemen geven. Men kan het beste een verdunde oplossing van de ijkstof maken op voorwaarde dat het oplosmiddel goed gescheiden wordt van de ijkstof en geen onzuiverheden bevat, die op de plaats van de ijkstof een piekje geven.

B. De standaardmethode

Stel, we willen de hoeveelheid m_x van een component X in een mengsel weten. We maken nu eerst een mengsel waarin bekende hoeveelheden m_x' en m_s' van de stof X en een standaardstof S zitten en injecteren dit mengsel. Hiervoor geldt:

Bij deze methode hoeft men ni nauwkeurig te injecteren.

$$m_x' = f_x A_x'$$
$$m_s' = f_s A_s'$$



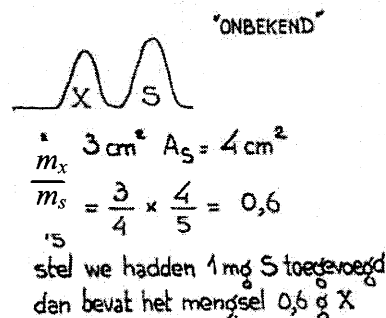
In deze vergelijkingen zijn A_x' en A_s' de respectievelijke oppervlakken en f_x en f_s de ijkfactoren.

Uit de vergelijkingen kunnen we de verhouding $f = f_x : f_s$ berekenen. Vervolgens voegen we aan het te analyseren monster een bekende hoeveelheid van dezelfde standaardstof S toe en injecteren dit. Dan geldt:

$$m_x = f_x A_x$$
$$m_s = f_s A_s$$

en dus:

$$m_x = m_s \frac{f_x A_x}{f_s A_s} = m_s f \frac{A_x}{A_s}$$



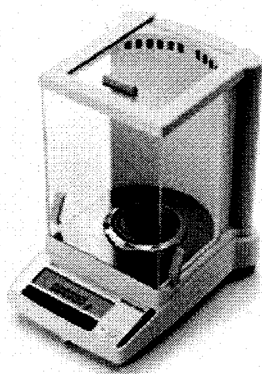
Hieruit kan nu de hoeveelheid m_x direct bekend worden.

De standaard S moet zo gekozen worden, dat hij goed gescheiden is van alle andere pieken en ongeveer dezelfde retentietijd heeft als X; voorts wordt de hoeveelheid m_s zodanig gekozen, dat het oppervlak van de standaardstof en de component X dezelfde orde van grootte hebben. Een voordeel van deze methode ten opzichte van het specifiek oppervlak is, dat de te injecteren volumina niet zeer nauwkeurig bekend dienen te zijn.

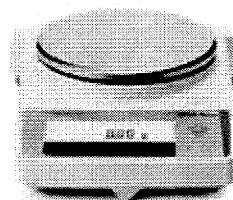
18 Wegen

18.1 De weegprocedure

Nauwkeurige wegingen (tot op 0,1 mg nauwkeurig) doen we met een *analytische balans*. In het geval dat de weging minder nauwkeurig mag zijn, kunnen we gebruik maken van de *bovenweger* (tot op 0,1 g of 0,01 g nauwkeurig). Deze heeft het voordeel dat het weegbereik groter is en dat de weging sneller uitgevoerd kan worden.



analytische balans



bovenweger

Let op: vul het weegvat nooit op de balans maar ernaast. Gemorste chemicaliën kunnen het oppervlak van de balans aantasten en het mechaniek en de elektronica beschadigen.

Zowel bij de analytische balans als de boverweger is de weegprocedure als volgt:

1. Zet het lege weegvat op de weegschaal en druk op 'tarra' om de uitlezing op nul te stellen.
2. Zet het weegvat naast de weegschaal op een tissue zodat gemorste chemicaliën worden opgevangen.
3. Vul het weegvat uit het voorraadvat. Gebruik bij vaste stoffen een spatel.
4. Zet het weegvat op de weegschaal en lees het gewicht af. Noteer de weegresultaten altijd onmiddellijk in het journaal. Het is verleidelijk om ze op losse papiertjes te noteren, maar die raken snel zoek.
5. Zet het weegvat weer naast de weegschaal op de tissue. Is de inhoud meer dan gewenst, neem dan wat weg. (Dit mag *niet* terug in het voorraadvat maar moet bij het chemisch afval.) Is de inhoud minder dan gewenst, voeg dan wat toe.
6. Herhaal 4 en 5 totdat het gewenste gewicht is bereikt.
7. Laat de balans en zijn omgeving na gebruik schoon achter!

18.2 Het gebruik van een analytische balans

De moderne analytische balans is een buitengewoon gevoelig instrument, d.w.z. dat een zeer klein verschil in massa al een redelijk verschil geeft op de schaal. Dit is nodig om met redelijke nauwkeurigheid te kunnen werken.

Voorbeeld
We willen op een analytische balans al hoeveelheden vanaf 50 mg nauwkeurig kunnen wegen. De relatieve fout bij een weging waarbij de absolute fout ± 0,05 mg bedraagt, is bij de afweging van 50 mg 0,1%. De moeilijkheid is dat we iets alleen maar op of in een weegvat (weegflesje, kroes, etc.) kunnen afwegen. Zo'n voorwerp weegt veel, soms meer dan 100 g. Daarom heeft een analytische balans een weegbereik van 150-200 g. De absolute fout van 0,05 mg over het volle bereik betekent bij een massa van bijvoorbeeld 100 g een relatieve fout van $0{,}05*10^{-3}/100 = 5*10^{-7}$. Dit is voor een relatief betaalbaar (toch nog 5000 euro!) en toch betrouwbaar handelsinstrument buitengewoon goed.

Keuze van het weegvat

1. Vaste stoffen die niet hygroscopisch zijn, kunnen in een open weegschuitje gewogen worden als de massa niet meer is dan 1 à 2 g.
2. Voor *vloeistoffen* (en hygroscopische vaste stoffen) wordt altijd een *gesloten* weegflesje gebruikt. Vloeistoffen zijn immers vluchtig en we willen niet dat tijdens de weging verdamping optreedt. Zeer veel vloeistoffen zijn trouwens ook hygroscopisch (namelijk alle vloeistoffen waarin meer dan 1 % water kan oplossen).
3. Gebruik nooit een *horlogeglas*. Door het grote oppervlak heb je hier immers extra last van mogelijke opname van waterdamp en van verdamping. De kans van 'wegwaaien' van het afgewogene bij vervoer van het horlogeglas naar de werktafel is niet denkbeeldig.

Andere opmerkingen

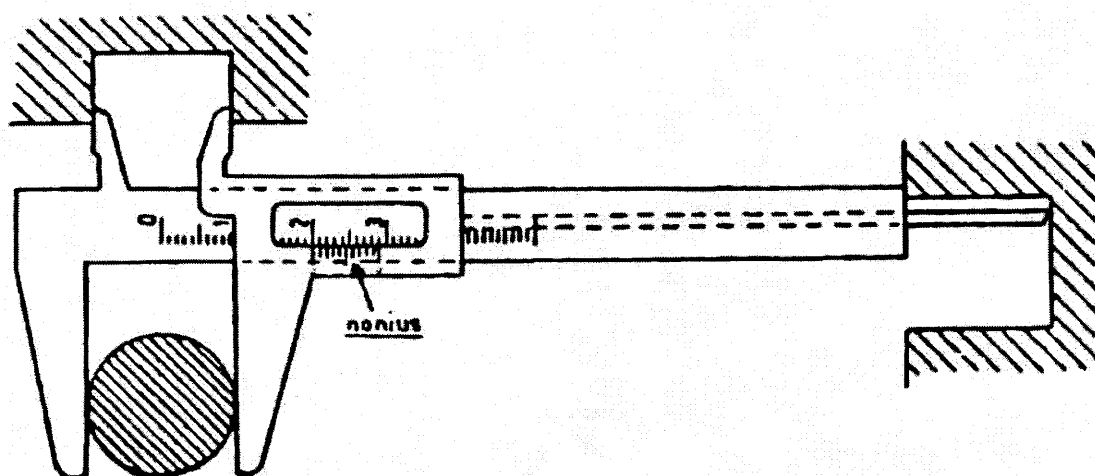
1. Veeg voor de weging de balans van binnen schoon met een kwastje. Zorg ook dat het rondom de balans schoon is. Laat de balans en zijn omgeving na gebruik schoon achter.
2. Hanteer het weegvat met pincet of tang of gebruik handschoenen (transpiratievocht heeft ook massa!). Zorg dat het weegvat van binnen en van buiten goed schoon en droog is.
3. Het weeggoed moet zo veel mogelijk in het midden van de schaal geplaatst worden om uniforme massaverdeling te verzekeren.
4. De balansruit moet alleen geopend worden bij het plaatsen of wegnemen van het weeggoed. Verder moet de balanskast altijd gesloten zijn om binnendringen van stof te voorkomen. Bij weging met open ruit kunnen door tocht afwijkingen tot 1 mg optreden. Weeg geen warme (of zeer koude) voorwerpen. Als men een warm voorwerp op de balans laat afkoelen, ziet men de afgelezen massa steeds stijgen. Het lijkt wel of warmte 'negatieve massa' heeft (de verklaring is dat de opstijgende warme luchtstroom langs de warme kolf de balansschaal met weegvat mee naar boven trekt).
5. Bij zeer nauwkeurige wegingen moet een correctie voor de opwaartse kracht van de lucht aangebracht worden. Een correctiegrafiek hiervoor hangt in sommige weegkamers. Bij stoffen met een lage dichtheid kan de correctie tot 0,1% oplopen.

19 Het meten van lengten

Van de beschikbare instrumenten om een lengte te meten, worden hier de schuifmaat en de schroefmicrometer besproken.

19.1 De schuifmaat

Dit instrument is geschikt om lengten, inwendige maten en diepten te meten tot een maximum van 13,5 cm. De lengten kunnen m.b.v. de nonius worden afgelezen met een afleesnauwkeurigheid van 0,05 mm.

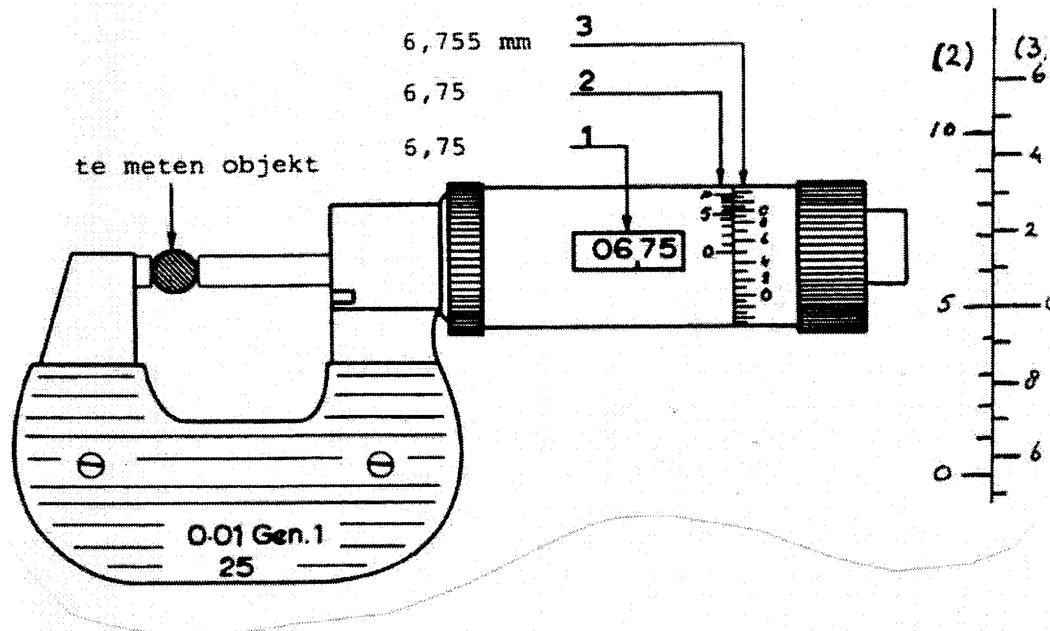


Aflezen:
Het aflezen van de schuifmaat gaat als volgt: men bepaalt tussen welke strepen de hoofdverdeling in millimeters (n en n+1) het nulpunt van de nonius zich bevindt. Daarna bepaalt men welke streep van de nonius (bijvoorbeeld de p^e) samenvalt met een streep van de hoofdverdeling. Afgelezen wordt dan n millimeters + p tiende van millimeters.

Opmerkingen
- Ga altijd na of het nulpunt van het instrument juist is. Eventueel moeten alle metingen voor een afwijking gecorrigeerd worden.
- Er bestaan ook digitale schuifmaten.

19.2 De schroefmicrometer

De schroefmicrometer is geschikt voor het meten van uitwendige maten tot maximaal 2,5 cm. De afleesnauwkeurigheid is 10^{-6} m.



Aflezen:
De hoofdschaal op het vaste gedeelte van het instrument (1) geeft het aantal millimeters en 0,1-millimeters nauwkeurig aan. De 5 van het voorbeeld is onnauwkeurig. De rand van de schroefdop (3) is in 50 of 100 gelijke delen verdeeld, afhankelijk van het type. (Bij een verdeling in 50 delen is het gemakkelijk om je te vergissen!! (bv. ...45 in plaats van ...95))

M.b.v. de nonius (2) zijn de laatste twee decimalen af te lezen. In het voorbeeld staat de nul van de nonius tussen 5 en 6 van de schaalverdeling van de schroefdop. De aflezing is dan 6,75. De laatste decimaal is het cijfer van de nonius dat op gelijke hoogte staat met een cijfer van de schroefdop, dus een 5 in dit voorbeeld. Aflezing dus 6,755 mm.

De volgende fouten kunnen worden gemaakt bij het meten met een schroefmicrometer:
- Toevallige fouten bij het aflezen, bijvoorbeeld als het gemeten voorwerp iets ingedrukt wordt of als er vuil tussen de platen zit.
- Systematische fouten, bijvoorbeeld als de platen niet helemaal glad of vlak zijn of niet helemaal parallel staan.
- Men vergeet de nulstand te bepalen en eventueel daarvoor te corrigeren.

Bijlage 4.A Fasering van onderzoek

Fase

A. Het probleem
- **opdracht**
- probleem stellen

B. Informatie
- probleem analyseren
- **geanalyseerd probleem**

C. Hypothese (verwachting)
- hypothesen stellen
- hypothesen selecteren

D. Toetsing
- **geoperationaliseerd probleem**
- experiment ontwerpen
- **Meetprogramma / recept**
- experiment uitvoeren
- resultaten evalueren
- **interpreteerbare resultaten**

E. Conclusies
- conclusies trekken
- **oplossing**

informatie verzamelen en interpreteren

Tussenproduct en activiteiten

1. Ga na wat er precies gevraagd wordt
2. Probeer het probleem af te bakenen of te beperken

---

3. Splits deelproblemen af
4. Ga in een gedachten experiment de onderlinge samenhang van de onderdelen na, en geef dat in een schema weer
5. Ga na welke variabelen er een rol spelen
6. Zoek relaties waarin die variabelen voorkomen
7. Spoor relaties op waarin grootheden voorkomen die samenhangen met de gevraagde variabelen
8. Noteer, aan welke criteria een oplossing moet voldoen

---

9. Verzamel informatie uit de literatuur of door een oriënterende meting over variabelen of relaties ten behoeve van een nadere probleemanalyse, over een meetmethode, enz.

---

10. Formuleer hypothesen (verwachtingen) als relaties worden verondersteld, die een oplossing van het probleem kunnen zijn
11. Formuleer hypothesen als relaties nader onderzoek vereisen

---

12. Selecteer die hypothesen die je wilt gaan toetsen. Betrek daarbij randvoorwaarden als beschikbare tijd en aanwezige apparatuur
13. Noteer aan welke criteria een experiment moet voldoen

---

14. Noteer of de variabelen meetbaar te variëren zijn, of ze constant gehouden kunnen worden of dat ze niet manipuleerbaar zijn
15. Spoor andere grootheden op die in relatie staan tot deze variabelen en wel meetbaar te variëren zijn
16. Noteer hoe de variabelen gemeten kunnen worden
17. Vergelijk de verschillende meetmethoden en maak een keuze
18. Betrek bij die keuze ook de gewenste betrouwbaarheid en nauwkeurigheid, de beschikbare tijd en apparatuur
19. Beschrijf nu globaal hoe je het experiment denkt te gaan uitvoeren
20. Schrijf hierna een meetprogramma of recept

---

21. Voer dat plan uit en noteer alle waarnemingen

---

22. Ga na hoe nauwkeurig en betrouwbaar je waarnemingen en resultaten zijn
23. Controleer aannames en beperkingen in relatie tot de gestelde criteria
24. Geef aan hoe je het experiment had moeten inrichten om betere resultaten te verkrijgen (optimaliseringsvraag)

---

25. Trek conclusies over de hypothesen (verwachtingen); stel zonodig nieuwe hypothesen op
26. Ga na of het probleem is opgelost
27. Noteer een eindconclusie

Bijlage 4.B Voorbeeldjournaals

4.B.1 Een voorbeeldjournaal bij een natuurkundig experiment.

Vooraf: De opdracht luidt: "Bepaal de elektrische weerstand van een (gegeven) koolweerstand." Beschikbaar zijn: een gelijkspanningsvoeding en twee multimeters. Er wordt verwezen naar de handleiding voor de wet van Ohm en voor de kleurcode op de weerstand.

OPDRACHT 000: WEERSTANDSBEPALING

(Datum: 29 februari 2016)

Doel: Het zo nauwkeurig mogelijk bepalen van de elektrische weerstand van een gegeven koolweerstand, door middel van spanning- en stroommeting.

Verwachting: De kleurcode geeft een benaderde waarde, die bij de opstelling gegeven zal worden, met een tolerantie van maximaal 10%, die binnen de foutmarge met de bepaalde waarde zal overeenstemmen.

Meetprocedure:

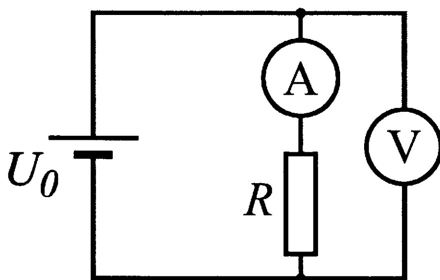
Theorie: Voor het bepalen van de weerstand kunnen we de wet van Ohm gebruiken

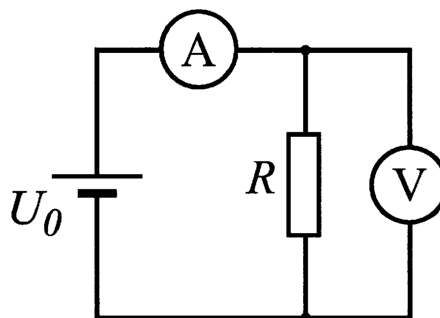
$U=IR$ met U = spanning in volt (V)
I = stroomsterkte in ampère (A)
R = weerstand in ohm (Ω)

Toepasbaarheid: De wet van Ohm heeft een beperking: de temperatuur mag niet (significant) stijgen, anders verandert ook de weerstand.

Formuleren meetmodel: Uit de wet van Ohm volgt het experimentele model: $R=U/I$
(Nu staat de formule in de juiste vorm als er één enkele U en I meting gedaan wordt en R direct hieruit berekend wordt. Beter is: een aantal U en I metingen uitzetten in een grafiek en R uit de helling bepalen. Het meetmodel kan dan weggelaten worden want bij 'Theorie' staat de formule al in de juiste vorm.)
Om R te bepalen worden dus Uen I voor verschillende waarden van U gemeten.

Meetmethode: Voor verschillende waarden van de spanning U wordt de stroomsterkte I door een weerstand gemeten m.b.v. een multimeter. Bovendien wordt de spanning over de weerstand gemeten m.b.v. een multimeter.
Er zijn twee mogelijke schakelingen om de spanning en de stroomsterkte tegelijkertijd te meten. Zie figuur 1 en 2. In figuur 1 staat de voltmeter over de weerstand én de ampèremeter. De ampèremeter zal dan de spanningsmeting beïnvloeden. Hoe belangrijk de spanningsval over de ampèremeter is kunnen we pas op de practicumvloer bekijken. Bij figuur 2 beïnvloed de voltmeter de stroommeting. Nu meet je de juiste spanning maar geeft de ampèremeter teveel stroom aan. Meting aan grote weerstanden kan beter met de schakeling uit figuur 1 en meting aan kleine weerstanden met die uit figuur 2. Bij te grote beïnvloeding van de multimeter kan met één multimeter eerst de stroomsterkte en daarna de spanning gemeten worden.





Figuur 1 Figuur 2
spanning- en stroommeting op twee manieren mogelijk

Bewerking: De verschillende waarden van U en I worden met hun fout in een tabel gezet. In een grafiek wordt U tegen I uitgezet en uit de helling wordt R bepaald . De helling is 1/R.

Nauwkeurigheidsanalyse: ΔU en ΔI volgens direct uit de nauwkeurigheid van de meters. Deze is in de gebruikersinstructie te vinden. ΔR volgt uit de minimale/maximale helling van de grafiek.

De opstelling:

De opstelling: Zie voor de opstelling de schakelschema's bij 'meetmethode'.

Gebruikte apparatuur:
- twee universeelmeters Unigor-A43
- gelijkspanningsvoeding Delta E015-2, bereik 0-15 V, 0-2A
- enkele koolweerstanden. We nemen weerstand van 470Ω ± 10% (kleurcode: geel-paars-zwaart-zwart-zilver)

Instellingscriteria: Instelling van de Unigor universeelmeter m.b.v. de zwarte schroef.

Beïnvloeding: Voor figuur 1: Stel U=15V(maximaal), dan is I ≈ 15V/470Ω ≈ 30mA. Volgens de apparatuurdocumentatie is de spanningsval over de ampèremeter in het meetbereik 0-30mA ongeveer gelijk aan 100mV. Dat is ongeveer 1% van 15V, dus ongeveer de klassefout!
Voor figuur 2: De spanningsmeter heeft op het 30V-bereik een weerstand van 3,16MΩ. Dit is ≈ 6000×R. Dus de ampèremeter maakt een fout van 1/6000. Dit is veel kleiner dan de vorige schakeling.
Conclusie: We kiezen voor de tweede schakeling. De fout (1/6000) is veel kleiner dan de klassefouten van de meters. We hoeven dus verder niet voor de systematische fout als gevolg van de beïnvloeding te corrigeren.

Metingen en bewerkingen:

Meetprogramma: Er wordt gemeten aan een 470Ω weerstand. Bij U ≈15V geldt dan I≈30 mA. Het vermogen dat aan warmte wordt ontwikkeld in de weerstand is P≈450mW. Een koolweerstand kan maximaal 0.6W verdragen dus dit is geen probleem.
Er worden 8 metingen gedaan tussen de 0-15V, met stappen van ±2V.

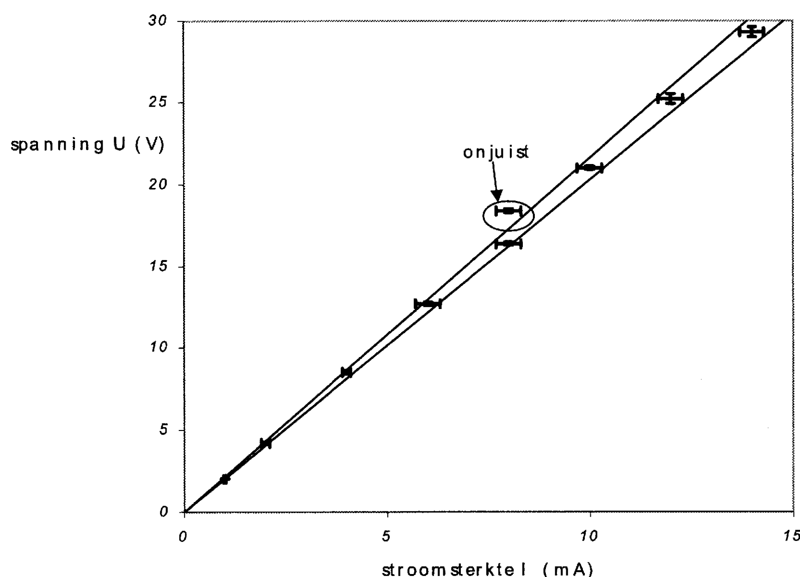
Metingen:

Tabel 1: Meten van weerstand R

U(V)	Bereik(V)	ΔU (V)	I(mA)	Bereik(mA)	ΔI (mA)
1.00	1	0.01	2,05	3	0.03
2.00	3	0.03	4,2	10	0.1
4.00	10	0.1	8,5	10	0.1
6.00	10	0.1	12,7	30	0.3
8.00	10	0.1	18,4	30	0.3
10.00	10	0.1	21,0	30	0.3
12.00	30	0.3	25,2	30	0.3
14.00	30	0.3	29,3	30	0.3

Opnieuw gemeten

U=0 en I=0 is ook een punt in de grafiek (controle nulinstelling).



Foutenverwerking: In de apparatuurdocumentatie staat de fout in de spanning en de stroom gegeven. De fout wordt bepaald door de klassefout: 1% van de volle schaaluitslag. (De afleesfout valt hierbinnen.) Voor de 2.00V meting in het 3V bereik geldt: 1% van 3V is een fout van 0.03V. Zo worden ook de andere fouten berekend, zie tabel 1.

Bewerking: De meetpunten staan in grafiek 1 uitgezet. Het punt bij U=8.00V lijkt niet goed te zijn en wordt opnieuw gemeten: 8.00V met 16,4 mA.
Dit punt klopt wel. Er zal wel sprake zijn geweest van een verkeerde aflezing.

Uit de grafiek volgt dat de lijnen met de max/min helling inderdaad een asafsnede van 0 hebben.
Voor dit meetgebied is het model goed. Uit de lijnen met max/min helling volgt: R_{max}=493 Ω en R_{min}=463 Ω. Dus R=478±15 Ω, afgerond R= 0.48±0.02 k Ω

Discussie en Conclusie:

Discussie: De fouten in de meting werden volledig veroorzaakt door klassefouten. Verbetering is te verwachten bij gebruik van betere meters.

Conclusie: Er is overeenstemming met de gevonden waarde en de berekende waarde: meting: 0.48±0.02 k Ω
berekening 0.47±0.05 k Ω
De verwachting is dus bevestigd, en het gestelde doel is bereikt met een nauwkeurigheid van 4%. Voor de systematische fout in de meetmethode hoeft niet gecorrigeerd te worden.

4.B.2 Een voorbeeldjournaal bij een scheikundig experiment.

Opdracht 1
Datum: 7 maart 2016 Partner: Ingrid Leusink
Doel: Het bepalen van de samenstelling van een mengsel van glutaarzuur en malonzuur.

(Een verwachting is in dit geval niet aan de orde. Je kunt ten hoogste verwachten dat het je lukt om de samenstelling te bepalen, maar dat is een triviale verwachting, en het kopje kan dus overgeslagen worden.)

Veiligheid: In het chemiekaartenboek zijn de kaarten van glutaarzuur en malonzuur opgezocht. De stoffen werken prikkelend (glutaarzuur) of bijtend (malonzuur) op de ogen, huid en ademhalingsorganen. Er moet dus voorkomen worden, dat de stoffen aangeraakt worden. Als dat wel zou gebeuren, moet er direct goed gespoeld worden met water. De oplossingen van deze stoffen zijn corrosief.

Meetprocedure:

Theorie: Malonzuur en glutaarzuur zijn beide dicarbonzuren. De molecuulformules zijn als volgt:

HOOC-(CH2)3-COOH	HOOC-CH2-COOH
glutaarzuur	malonzuur

De dichtheden zijn bekend:
glutaarzuur = 1,424 g/cm3 en malonzuur = 1,619 g/cm3
De molmassa's zijn bekend:
glutaarzuur M=132 g/mol, malonzuur M=104 g/mol

Oriëntatie op meetmethode:
Er moet één of andere grootheid gevonden worden, die afhankelijk is van de samenstelling en die bovendien meetbaar is.
Mogelijkheden:
a. dichtheid
Bepalen dichtheid poedervormige stoffen is experimenteel nogal lastig. Dus niet zo geschikt.

b. smeltpunt
Het smeltpunt is niet evenredig met de samenstelling. Er zouden allerlei bekende mengsels gemaakt kunnen worden en dan zou bijvoorbeeld het verband gemeten kunnen worden tussen de samenstelling en het smeltpunt om vervolgens het smeltpunt van het onbekende mengsel te bepalen. Methode is in principe goed, maar nogal arbeidsintensief.

c. gemiddeld molecuulgewicht
Het gemiddeld molecuulgewicht van de samenstelling kan bepaald worden. Dit gemiddelde kan gebruikt worden om de exacte samenstelling te bepalen als er slechts twee stoffen aanwezig zijn, waarvan de molmassa bekend moet zijn. Aan beide voorwaarden wordt hier voldaan.

Methode c zal gebruikt worden, omdat deze het best uitvoerbaar is.

Formuleren meetmodel: Als de samenstelling van het mengsel glutaarzuur/malonzuur = x : y (mol%) dan geldt:

$$M_{mengsel} = \frac{x}{100}132 + \frac{y}{100}104 \qquad (1)$$

Bovendien geldt x + y = 100, dus

$$M_{mengsel} = \frac{x}{100}132 + \frac{100-x}{100}104 \qquad (2)$$

ofwel:

$$x = \frac{100}{28}(M_{mengsel} - 104) \qquad (3)$$

Meting van $M_{mengsel}$ levert dus x op.

In dit geval is zuur-base titratie een geschikte, vrij snelle methode.
Als we voor de titratie van a gram mengsel v ml NaOH (b mol.l^{-1}) verbruiken, dan geldt: aantal mol zuur = aantal mol NaOH (tweebasische zuren), dus:

$$\frac{a}{M_{mengsel}} = \frac{1}{2} vb \cdot 10^{-3}$$ (4) en dus

$$M_{mengsel} = \frac{2a}{vb \cdot 10^{-3}}$$ (5)

Invullen in (3) levert:

$$x = \frac{100}{28}\left(\frac{2a}{vb \cdot 10^{-3}} - 104\right)$$ (6)

Meetmethode: Als er de beschikking is over loog met een bekende concentratie (b), hoeft alleen nog, maar a (met een balans) en v (met een buret) gemeten te worden. Indicator: fenolftaleïne, want beide zijn zwakke zuren en pH van 2e equivalentiepunt zal wel > 8 zijn. Als gemeten wordt met een zuigerburet met max.10 ml 0,1000 M NaOH, moet maximaal ½·10·0,1000 mmol zuur afgewogen worden. D.w.z. ongeveer 50 mg ($M_{mengsel}$ ligt tussen 104 g/mol en 132 g/mol).

Metingen en bewerkingen:

Meetprogramma: Weeg ca 50 mg mengsel af op een analytische balans (4 decimalen), breng dit kwantitatief over in een erlenmeyer van 100 ml en voeg ca 25 ml demiwater toe. Vul de buret met 0,1000 M NaOH (3x voorspoelen). Voeg 3 druppels fenolftaleïne toe en titreer tot kleuromslag (zwak roze). Doe dit 5 keer.

Metingen:

Tabel 1 : Meetresultaten

Meting	Massa (gram) Weegschuitje vol	Massa (gram) Weegschuitje leeg	a (mg)	v (ml)	$M_{mengsel}$ (formule 5)	Opm.
1	7,1823	7,1354	46,9	7,44	126,1	
2	8,9261	8,8801	46,0	7,26	126,7	
3	7,0927	7,0396	53,1	8,81	120,5	te ver
4	8,7831	8,7271	56,0	8,80	127,2	
5	8,6432	8,5884	54,8	8,68	126,3	

De derde meting wordt niet meegenomen, bij die meting is door het equivalentiepunt geschoten.

Bewerking en foutenverwerking: Het gemiddelde wordt berekend op basis van de metingen 1, 2, 4 en 5: M = 126,6 g/mol. S.d is te berekenen met de formule: $s^2 = \frac{\sum\left(M_i - \bar{M}\right)^2}{n-1}$

Daaruit volgt dat s = 0,49 g/mol en dat s_{gem} = (1/√n)·s = 0,24 g/mol.

Er kan ook een interne foutschatting worden gedaan m.b.v. de gemiddelde afwijking van de metingen t.o.v. de gemiddelde waarde. Dat levert 0,4 op, hetgeen aardig overeenkomt met $2s_{gem}$, het '95%-interval'. Dat interval geldt echter voor een oneindig aantal metingen en er zijn slechts 4 goede meetwaarden. Voor 4 meetwaarden is het 95%-interval $3{,}2s_{gem}$ (tabel in APH, bijlage 2). Met 95% zekerheid ligt $M_{mengsel}$ dus in het gebied 126,6 ± 0,8 g/mol. Uit formule (3) volgt dan dat x ligt tussen 77,9 en 83,6, want Δx = (100/28)* $\Delta M_{mengsel}$ (zie §6.5.1 in de APH). Dus x = 80,7 ± 2,8 mol% glutaarzuur. De relatieve fout is (2,8/80,7) * 100 = 3,5%.

Berekening gewichtsverhouding

100 mol mengsel bevat 80,7 (± 2,8) mol glutaarzuur en 19,3 (± 2,8) mol malonzuur, ofwel 80,7 (± 2,8) * 132 gram glutaarzuur en 19,3 (± 2,8) * 104 gram malonzuur → 84,1 (±2,4) % glutaarzuur en 15,9 (±2,4) % malonzuur.

Discussie en Conclusie:

Discussie: De gevolgde methode is inderdaad geschikt om vrij snel de samenstelling van het mengsel te bepalen met een nauwkeurigheid van enkele procenten. Onze resultaten komen binnen de foutengrenzen overeen met die van de rest van de groep en met de (bij de assistent) bekende waarde van de samenstelling van het mengsel.

Conclusie: Het mengsel bevat 84,1 ± 2,4 massa% glutaarzuur en 15,9 ± 2,4 massa% malonzuur (95%-interval). De fout kan uiteraard verkleind worden door meer metingen te doen of door grotere hoeveelheden zuur (Schellbachburet 50 ml) te gebruiken.

Literatuur

Chemiekaartenboek, glutaarzuur en malonzuur, 4e druk, 1989, p. 34 en p. 78.

APH, handleiding voor het eerstejaars practicum; Technische Universiteit Nederland, Vestiging Twente ; 2015-2016.

Bijlage 4.C Bouwplan verslag

Het is belangrijk om niet zomaar te gaan schrijven, maar eerst na te denken over de structuur van je verslag. De standaard verslagstructuur kun je gebruiken als uitgangspunt voor een bouwplan of opzet van je verslag: in grote lijnen zal dit voor de meeste opdrachten uit het eerste jaar bruikbaar zijn. De standaard verslagstructuur is echter nog veel te algemeen en te beknopt. Voor het bouwplan is het de bedoeling dat je dit vertaalt naar de opdracht waarover jouw verslag gaat.

a. Titel
Denk al eens echt goed na over een titel, die de essentie van de opdracht zoals jij die hebt uitgevoerd goed dekt.

b. Samenvatting
Geef in het kort weer wat er in de samenvatting moet komen (in ieder geval iets over doel, methode en resultaat). Wat zijn eigenlijk je resultaten: is een hypothese bevestigd? Heb je een bepaalde waarde gevonden en komt die wel of niet overeen met de literatuur of met je verwachtingen? Valt er weinig te concluderen en zou je eigenlijk meer metingen moeten doen?

c. Inleiding
Wat moest je onderzoeken, wat wist je al, moest je nog uitzoeken welke methode je moest gebruiken of lag die vast? Moest je een empirisch verband vinden? Probeer - in trefwoorden of in telegramstijl - op te schrijven wat het probleem of het doel van de opdracht was.
N.B. Het doel van een eerstejaars practicumopdracht is in een verslag nooit iets als: 'we moesten kennismaken met warmteoverdracht' of 'uitvoeren van een proef over stromingsleer'.

d. Theoretische aspecten
Geef in het bouwplan schematisch aan wat je in je verslag bij dit onderdeel probeert uit te leggen en wat je niet uitlegt, omdat je daarvoor naar literatuur verwijst. Welke formules komen hier naar voren, welke leid je af, welke leg je uit? Met de begeleider kan je dan kortsluiten of dit overeenkomt met zijn of haar idee hierover.

e. Experimentele aspecten
Kun je tekeningen, schema's in je verslag opnemen, zo ja welke/waarvan? Welke 'spullen' heb je gebruikt? Welke wil je wel en welke niet vermelden in je verslag? Welke praktische gegevens van de gebruikte apparatuur e.d. moet je vermelden? Welke zijn essentieel en welke kan je weglaten om het experiment opnieuw uit te kunnen voeren of om aan te geven wat speciaal is aan jouw meting.

f. Meetgegevens
Hoe presenteer je ze: in één tabel, in verschillende tabellen. In het verslag zelf, moet het in bijlagen? Zijn er grafieken, hoeveel, welke, kan de tabel weg omdat alles al in de grafiek staat?

g. Berekeningen
Hoe geef je aan hoe meetresultaten uitgewerkt zijn? Wanneer is een uitwerking zinvol om te geven ? Kun je (de resultaten van) berekeningen ook overzichtelijk in tabellen stoppen? Wat doe je met fouten, waar vermeld je de foutbewerking?

h. Discussie en conclusies
Wat zijn de resultaten? Welke 'kloppen', welke vind je onnauwkeurig, onbetrouwbaar, 'vreemd', kloppen niet met de theorie, wijken af van de literatuurwaarden enz.? Wat voor soort verklaringen heb je voor een of meerdere van bovengenoemde constaterin-

gen. Wat kun je concluderen? Waarover kun je geen duidelijke conclusies trekken? Zijn er verdere metingen nodig? Heb je suggesties voor verder onderzoek of voor nauwkeuriger metingen?

i. **Referenties**
Welke literatuur heb je gebruikt en welke moet je hier vermelden? Waar moet je in je verslag verwijzen naar deze literatuur?

j. **Symbolenlijst**
Maak alvast een lijst van de symbolen die hier in vermeld moeten worden. Welke notatie van symbolen gebruik je?

Bijlage 4.D Voorbeeldverslag

(Dit is een voorbeeldverslag bij een natuurkundig experiment.)

Vooraf: Over de opdracht van het voorbeeldjournaal moet een verslag worden geschreven. De titelpagina is hier weggelaten. Ook staat hier alles achter elkaar, terwijl in een 'echt' verslag eventueel nieuwe pagina's voor de verschillende onderdelen gebruikt worden.

Samenvatting

De elektrische weerstand van een koolweerstand is bepaald door middel van meting van de spanning over en de stroomsterkte door een weerstand. Voor de berekening van de weerstandswaarde uit de metingen is de wet van Ohm toegepast. De gevonden weerstandswaarde bedraagt 0.48 ± 0.02 kΩ. De metingen zijn in overeenstemming met verwachting volgend uit de kleurcode.

Inhoudsopgave	pag.

Inleiding

De thans bekende waarde van de weerstand van de koolweerstand is 470Ω(10%). Voor de bepaling van de weerstand van een koolweerstand, in het algemeen een geleider, bestaan verschillende methoden. Afhankelijk van de te gebruiken meters is de directe methode bestaande uit meting van de spanning over en de stroomsterkte door de weerstand in de meeste gevallen goed bruikbaar.
In de Theoretische Aspecten wordt de wet van Ohm behandeld. In de Experimentele aspecten is gekozen voor die schakeling waarbij beïnvloeding van meetapparatuur minimaal is. De metingen zijn uitgewerkt in een grafiek en er wordt afgesloten met de conclusies.

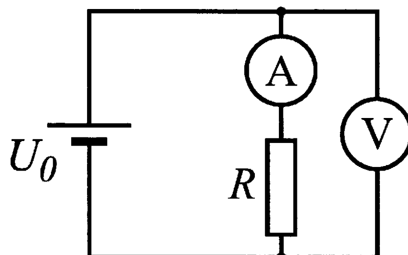
Theoretische aspecten

In de literatuur [1] is als bruikbare relatie tussen spanning en stroomsterkte de wet van Ohm vermeld:

$$U=IR \qquad (1)$$

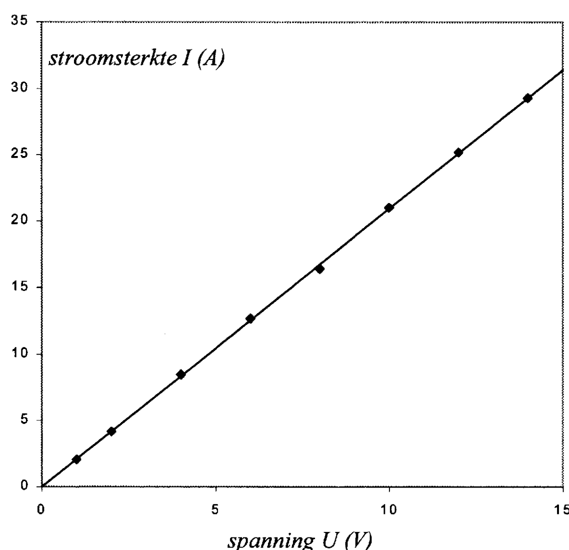
waarin U de spanning over de koolweerstand, I de stroomsterkte erdoor en R de weerstand voorstelt. De eenheden zijn resp. V,A,Ω. De waarde van R is als constant te beschouwen, mits de temperatuur voldoende constant blijft.
Een meting van de spanning en de stroomsterkte, waarbij de gemeten I-waarden grafisch worden uitgezet tegen de ingestelde U-waarden, zal onder de gegeven voorwaarde een rechte lijn opleveren. De waarde van R is dan te vinden uit de helling van de grafiek.

Experimentele aspecten
De spanning en stroomsterkte zijn gemeten m.b.v. de schakeling uit figuur 1. Deze schakeling is gekozen omdat voor de gebruikte weerstand experimenteel bleek dat hiermee de beïnvloeding van de meting door de meters minimaal is. De overeenkomstige schakeling, waarbij de ampèremeter vóór de weerstand is geschakeld, had bij deze weerstand een fout in de ordegrootte van de klassefout van de meters en was daarmee niet verwaarloosbaar.



figuur 1 – de gebruikte schakeling

Metingen en bewerkingen
De verkregen metingen zijn weergegeven in figuur 2. Uit de grafiek blijkt dat het veronderstelde model (de wet van Ohm) goed toepasbaar is: de grafiek is (binnen de foutengrenzen) goed te benaderen met een rechte lijn door de oorsprong. De best passende lijn, bepaald met de methode minimale/maximale helling, is in de figuur aangegeven. De daarbij behorende waarde voor de weerstand is: R = 0,48± 0,02 k Ω
De fouten zijn berekend met de methode van de 'grootst mogelijke fout'.



figuur 2 – De stroom door de weerstand uitgezet als functie van de spanning over de weerstand. Getrokken lijn: Best passende lijn vanuit de max/min helling methode

Discussie en conclusies
Uit de verkregen meetresultaten blijkt dat het model (de wet van Ohm) een goede benadering is van de meetgegevens. Kennelijk is het effect van een weerstandsverandering door een temperatuurstijging niet opgetreden.
De gekozen meetmethode blijkt goed toepasbaar voor dit probleem; de nauwkeurigheid is aanzienlijk beter (4%) dan met de kleurcode bereikbaar is (10%). De optredende systemati-

sche fout is niet zodanig dat deze de meting belemmert. De gevonden waarde van de weerstand 0.47 ± 0.01 kΩ blijkt goed in overeenstemming te zijn met de bekende waarde uit de kleurcode: 0.47 ± 0.05 kΩ.
Mogelijke verbeteringen zijn te verwachten door toepassing van betere meters, daar de fout in de meting bepaald wordt door de klassefout.

Symbolenlijst

R: elektrische weerstand (Ω)
U: spanning (V)
I: stroomsterkte (A)

Referenties

[1] APH, handleiding voor het eerstejaars practicum; Technische Universiteit Nederland, Vestiging Twente ; 2015-2016.

Bijlage 6.A Voorbeelden van kansdichtheidsfuncties

6.A.1 De Gauss- of normale verdeling

Als bij een meting het resultaat wordt veroorzaakt door een groot aantal kleine, onderling onafhankelijke, fouten, dan kan men laten zien dat de volgende kansdichtheidsfunctie geldt:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

De functie wordt gekarakteriseerd door twee constanten: σ en μ. De functie is symmetrisch rond $x = \mu$ en de functie nadert naar nul als $|(x-\mu)|$ groot wordt ten opzichte van σ.

De voorfactor is zo gekozen dat de functie qua oppervlak genormeerd is op 1. Ga dat na. (zie hieronder)

Enkele belangrijke integralen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{als}: m=0 \\ 0 & \text{als}: m=1 \\ \sigma^2 & \text{als}: m=2 \\ 0 & \text{als}: m=3 \\ 3\sigma^4 & \text{als}: m=4 \end{cases} \qquad (2)$$

De kans P(a) dat een meting tussen μ-a en μ+a zal liggen wordt dan gegeven door:

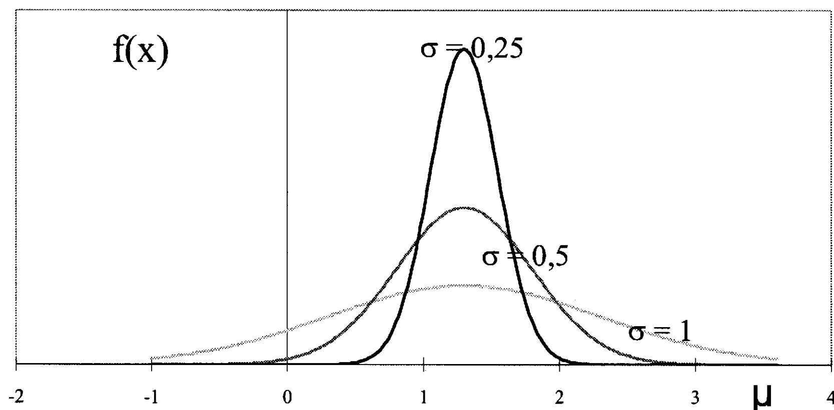
$$P(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mu-a}^{\mu+a} e^{\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2}}\,dx \qquad (3)$$

Enkele belangrijke waarden voor de kans P(a) zijn:

$P(\sigma) \approx 0{,}683$
$P(2\sigma) \approx 0{,}954$
$P(3\sigma) \approx 0{,}9973$
$P(4\sigma) \approx 0{,}99994$

In figuur 1 zijn Gaussverdelingen getekend voor enkele waarden van σ. Naarmate σ stijgt wordt de functie breder en de top lager. De buigpunten van de Gaussverdeling vinden we door d^2f/dx^2 gelijk aan nul te stellen. Men vindt voor de buigpunten: $x=\mu+\sigma$ en $x=\mu-\sigma$, waardoor de betekenis van σ wordt geïllustreerd.

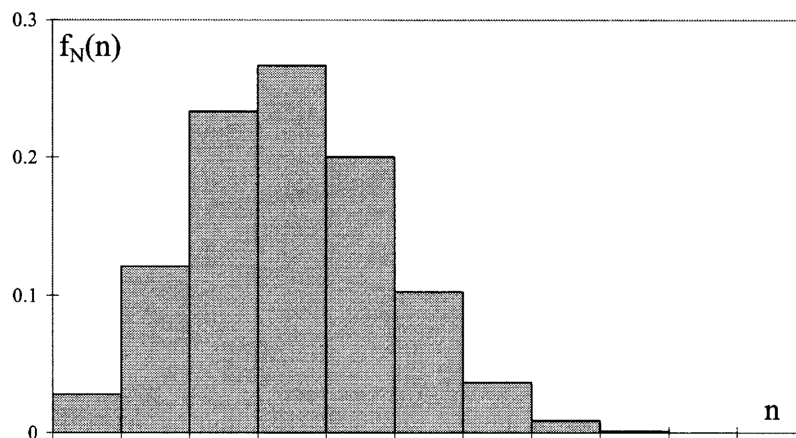
De breedte op halve hoogte (FWHM: full width at half maximum) wordt gegeven door:
$FWHM = 2\,\sigma\,\sqrt{(2\ln 2)}$



Figuur 1 – Gaussverdeling, met μ=1,3

6.A.2 De binomiale verdeling

De Gaussverdeling geldt wanneer door toevallige oorzaken het resultaat van een meting in principe een oneindig aantal waarden kan aannemen (een continue verdeling). Er zijn echter meetmethoden die berusten op een discreet meetproces: metingen met een beperkt aantal mogelijke uitkomsten. Een voorbeeld is een meetproces waarbij geldt: een gebeurtenis leidt al dan niet tot een resultaat, zoals bij het tellen van deeltjes in radioactieve straling. Ook photon counting, het tellen van fotonen met een diode of fotomultiplicatorbuis, valt hieronder.
Daarom beschouwen we naast de Gaussverdeling ook de binomiale verdeling, waarmee discrete meetmethoden kunnen worden beschreven.



Figuur 2 – Binomiale verdeling (N=10; p=1/3)

Stel dat een gebeurtenis slechts twee mogelijke aflopen heeft: "ja" en "nee". Als de kans op "ja" gelijk is aan p, dan is de kans op "nee" q=1-p. Wanneer er N zulke gebeurtenissen zijn, dan is de kans $f_N(n)$ dan n keer "ja" voorkomt en N-n keer "nee", gelijk aan:

$$f_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \qquad (4)$$

In figuur 2 is een binomiale verdeling getekend, voor N=10 en p=1/3. Merk op dat deze functie niet symmetrisch is. Ook komen geen waarden van n<0 voor.
De functie is genormeerd. Men kan dit controleren door te sommeren van n=0 tot n=N:

$$\sum_{n=)}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1^N = 1 \qquad (5)$$

De verwachtingswaarde $\langle n \rangle$ van n blijkt te zijn: $\langle n \rangle = N \cdot p$:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=)}^{N} n \cdot f_N(n) = \sum_{n=)}^{N} n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ Np &\sum_{n=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-1-(n-1))!} p^{n-1} q^{N-1-(n-1)} = Np(p+q)^{N-1} = N \cdot p \end{aligned} \qquad (6)$$

Dit was te verwachten. De kans per gebeurtenis op resultaat "ja" is p, zodat het gemiddelde aantal keren "ja" bij N gebeurtenissen N·p zal zijn.

De standaarddeviatie σ is gegeven door σ = √(N·p·q):

$$\begin{aligned} &\sigma^2 = \left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle n^2 - 2n\langle n \rangle - \langle n \rangle^2 \right\rangle = \langle n(n-1) \rangle + \langle n \rangle - \langle n \rangle^2 \\ &\langle n(n-1) \rangle = \sum_{n=)}^{N} n(n-1) \cdot f_N(n) = N(N-1) \cdot p^2 \\ &dus\text{: } \sigma^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq \end{aligned} \qquad (7)$$

6.A.3 De Poissonverdeling

Uit de binomiale verdeling kan de Poissonverdeling worden afgeleid als het limietgeval voor N→∞ en p→0, echter zodanig dat het product N·p constant blijft (noem Np=z).

De Poissonverdeling komt voor bij telprocessen van willekeurig in de tijd gespreide gebeurtenissen. De gemiddelde frequentie is daarbij constant. Stel dat een aantal malen, telkens gedurende t seconden, fotonen worden geteld. De geobserveerde aantallen vormen dan een Poissonverdeling.
We verdelen dan in gedachten elk van die perioden van t sec in N delen, waarbij N zeer groot is. Stel dat $N=10^9$, en dat in t sec gemiddeld 28 fotonen worden geteld (z=28), dan is de kans p op het registreren van een foton in zo'n subperiode van de orde van $28 \cdot 10^{-9}$, dus heel klein.
Gebeurtenis "ja" is nu het detecteren van een foton in zo'n subperiode en "nee" het niet detecteren van een foton. Omdat p zo klein is kunnen we dubbeltellingen (2 fotonen tegelijk in één subperiode) verwaarlozen.
Voor deze subperiode kan men nemen: de dode tijd van de detector. Dit is de tijd die een detector + verwerkingselektronica nodig heeft om één foton te verwerken. Een ordegrootte daarvoor is 10 ns.
Gevraagd wordt nu: hoe groot is de waarschijnlijkheid dat gebeurtenis "ja" juist n keer voorkomt?
Het antwoord op deze vraag is:

$$f_z(n) = \frac{z^n e^{-z}}{n!} \qquad (8)$$

Afleiding van de Poissonverdeling:

$$f_z(n) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=z}} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ Np=z}} \frac{(Np)^n}{n!} \frac{N(N-1)......(N-n+1)}{N^n} (1-p)^{N-n}$$

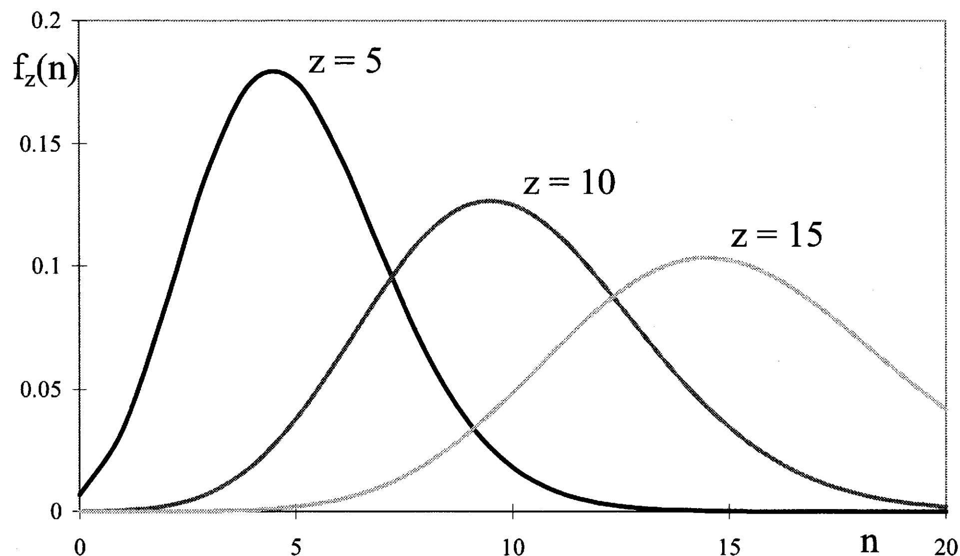
Nu is: $\lim_{N\to\infty} \frac{N(N-1)......(N-n+1)}{N^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{N^n}{N^n} = 1$

en: $(1-p)^{N-n} = (1-\frac{z}{N})^N (1-\frac{z}{N})^{-n}$

$\lim_{N\to\infty} (1-\frac{z}{N})^N = e^{-z}$ en: $\lim_{N\to\infty} (1-\frac{z}{N})^n = \lim_{N\to\infty} (1-0)^n = 1$

zodat: $f_z(n) = \frac{(Np)^n}{n!} \cdot 1 \cdot e^{-z} \cdot 1 = \frac{z^n e^{-z}}{n!}$

Merk op dat de Poissonverdeling slechts 1 parameter heeft. Dit in tegenstelling tot de Gauss- en de binomiale verdeling, die er 2 hebben.
Sommatie van $f_z(n)$ over n levert 1 op, zoals gemakkelijk te controleren valt. In figuur 3 is een voorbeeld geschetst.



Figuur 3 – Poissonverdeling

De verwachtingswaarde $\langle n \rangle$ en de standaarddeviatie σ volgen rechtstreeks uit die van de binomiale verdeling (immers nu is q=1 te stellen):

$$\langle n \rangle (= Np) = z \tag{9}$$

en:

$$\sigma (= \sqrt{Npq}) = \sqrt{z} \tag{10}$$

Bij één telproces met z' als resultaat zijn de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie onbekend. De beste afschattingen zijn voor beide z' (resp. $\sqrt{z'}$) zelf. Ga dit na.
Bij een telproces is de fout dus (ongeveer) gelijk aan de wortel uit het aantal tellen!

Bijlage 6.B Afleiding formules interne foutschatting

In de hoofdtekst is gesproken over de standaardafwijking, σ, die hoort bij een normale verdeling van oneindig veel punten. Omdat er in de praktijk uiteraard nooit oneindig veel meetpunten zijn, wordt er gekeken naar de standaardafwijking in het gemiddelde van een zeer groot aantal steekproeven, $\sigma_{\bar{x}}$. De metingen x_i komen uit een normale verdeling en het steekproefgemiddelde is gedefineerd door:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

6.B.1 Afleiden van $\sigma_{\bar{x}}$

Bij een groot aantal meetseries is de verwachtingswaarde $\langle \bar{x} \rangle$ van de kansverdeling van de gemiddelden gelijk aan die van elke meetserie ($\langle x \rangle$), want beide zijn gebaseerd op dezelfde kansdichtheidsfunctie f(x) van de gehele, oneindig grote meting:

$$\langle \bar{x} \rangle = \left\langle \sum \frac{x_i}{n} \right\rangle = \frac{1}{n} \left\langle \sum x_i \right\rangle \frac{1}{n} \sum \langle x_i \rangle = \langle x \rangle \qquad (1)$$

Voor een serie van n metingen geldt:

$$\bar{x} - \langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum \left(x_i - \langle \bar{x} \rangle \right) \qquad (2)$$

en ook:

$$\left(\bar{x} - \langle \bar{x} \rangle \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum \left(x_i - \langle \bar{x} \rangle \right)^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \sum \left(x_i - \langle \bar{x} \rangle \right) \left(x_j - \langle \bar{x} \rangle \right) \qquad (3)$$

Wanneer hiervan de verwachtingswaarde $\left\langle (\bar{x} - \langle \bar{x} \rangle)^2 \right\rangle$ wordt berekend, dan is de verwachtingswaarde van $(x_i - \langle \bar{x} \rangle)^2$ in de eerste term: $n \cdot \left\langle (x - \langle \bar{x} \rangle)^2 \right\rangle$. De verwachtingswaarde van iedere term in de dubbele sommatie is echter nul onder de aanname dat de metingen x_i statistisch onafhankelijk zijn.

> Hier is gebruik gemaakt van:
> $\langle ax \rangle = a \langle x \rangle$ als a een reëel getal is;
> $\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$;
> $\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$ als x en y onafhankelijk van elkaar zijn (de kansdichtheidsintegralen over f(x) en g(y) zijn dan te scheiden) (Ga dit na. Aanwijzing: kans dat *tegelijk* een x-meetresultaat tussen x en xdx, en een y-meetresultaat tussen y en ydy valt is: f(x)dx.g(y)dy.

Het resultaat is dus: $\sigma_{\bar{x}}^2 = \left\langle (\bar{x} - \langle \bar{x} \rangle)^2 \right\rangle = (1/n) \cdot \left\langle (x - \langle \bar{x} \rangle)^2 \right\rangle$, zodat:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

In woorden: de *standaardafwijking* in het gemiddelde van oneindig veel series van n waarnemingen is $1/\sqrt{n}$ maal de standaardafwijking in één enkele waarneming.

6.B.2 Afleiding van s en $s_{\bar{x}}$

Een experiment zal echter meestal bestaan uit een enkele meetserie van een beperkt aantal, n, metingen. We kennen σ en $\sigma_{\bar{x}}$ niet. Daarvoor hebben we immers een oneindige meetserie x_i nodig. Voor deze parameters zijn wel schatters af te leiden. Dat zal in het volgende gebeuren.

Definieer de zogenaamde *residuen* d_i als:

$$d_i = x_i - \bar{x} \tag{5}$$

en de gemiddelde afwijking S in de steekproef als:

$$S^2 \equiv \frac{1}{n}\sum d_i^2 \tag{6}$$

Voor S^2 kan men schrijven:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum \left((x_i - \langle\bar{x}\rangle) - (\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle)\right)^2 = \\ &\frac{1}{n}\sum (x_i - \langle\bar{x}\rangle)^2 + \frac{1}{n}\sum (\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle)^2 - \frac{2}{n}\sum (x_i - \langle\bar{x}\rangle)\cdot(\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle) = \\ &\frac{1}{n}\sum (x_i - \langle\bar{x}\rangle)^2 + (\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle)^2 - 2(\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle)^2 = \\ &\frac{1}{n}\sum (x_i - \langle\bar{x}\rangle)^2 - (\bar{x} - \langle\bar{x}\rangle)^2 \end{aligned} \tag{7}$$

Dit geldt dus voor 1 serie van n metingen. We kunnen hiervan de verwachtingswaarde bepalen voor een groot aantal series. Dat levert op:

$$\langle S^2 \rangle = \sigma^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 \tag{8}$$

Met vergelijking 4 volgt:

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\langle S^2 \rangle \quad en \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\langle S^2 \rangle \tag{9}$$

De grootheid $\langle S^2 \rangle$ is onbekend. Onze beste schatting is S^2, op basis van de eindige meetserie. Als men deze nu in vergelijking 8 en 9 invult, verkrijgt men de *beste afschatting van σ* die mogelijk is. Men noemt dit resultaat de steekproefstandaardafwijking of standaard fout s:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{10}$$

De ***standaard fout van het gemiddelde*** $s_{\bar{x}}$ is dus:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \text{zodat}: s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \tag{11}$$

Hierin is $\bar{x}$ het steekproefgemiddelde.

6.B.3 Doorwerking van de standaard fout in berekeningen

Behalve het bepalen van de fout in een enkele gemeten grootheid is het meestal ook nodig om fouten door te werken in een eindresultaat. De te bepalen grootheid volgt namelijk vaak uit een aantal gemeten grootheden. De fouten in de gemeten grootheden moeten dus doorgewerkt worden in het berekende eindresultaat.

We gaan uit van een grootheid y die wordt bepaald door een reeks onafhankelijke grootheden $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Het functieverband is:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{12}$$

We noteren met X_1 etc. de werkelijke (dus onbekende) waarden van de meetbare grootheden en met Y de daarbij behorende functiewaarde. Als nu geldt:

$$|x_j - X_j| << |x_j| \tag{13}$$

(dus voor relatief kleine fouten), dan volgt in goede benadering:

$$y - Y = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)' (x_j - X_j) \tag{14}$$

Het accent ' duidt aan dat bij het differentiëren de andere variabelen constant worden gehouden. Door kwadrateren vinden we:

$$(y-Y)^2 = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'^2 (x_j - X_j)^2 + \sum_{i \neq j}\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)' \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)' (x_i - X_i)(x_j - X_j)$$

Bij het berekenen van de variantie in y: $\sigma_y^2 = \langle (y-Y)^2 \rangle$, geeft de tweede term van bovenstaande vergelijking een bijdrage nul, omdat $\langle x_i - X_i \rangle . \langle x_j - X_j \rangle = 0$ voor $i \neq j$. Er blijft over:

$$\sigma_y^2 = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'^2 \sigma_{xj}^2 \tag{15}$$

In de praktijk hebben we niet te maken met oneindig veel meetresultaten. Iedere grootheid x_j zal gemeten zijn in een meetserie van n_j metingen, waarbij elke serie een eigen beste schatting van de middelbare fout zal opleveren: σ_{xj} . Dan kunnen we opschrijven als beste afschatting s_y van σ_y:

$$s_y^2 = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)'^2 s_{xj}^2 \tag{16}$$

We moeten nu echter differentiëren rond de *gemiddelde* waarden $\overline{x}_j$ van de meetseries van elke xj in plaats van rond de *werkelijke* waarden Xj, want die werkelijke waarden zijn bij een eindige meetserie uiteraard onbekend.

6.B.4 Voorbeeld foutendoorwerking met behulp van de Poisson-verdeling

We behandelen nu een voorbeeld van het gebruik van de Poissonverdeling: telstatistiek van een radioactief preparaat.

Probleem: bepaal het teltempo (in tellen/sec) van het preparaat.
Naast het signaal (S) dat veroorzaakt wordt door het preparaat moet ook de achtergrond-radioactiviteit (A) worden gemeten, zodat S kan worden gecorrigeerd. De totaal beschikbare meettijd is T.

Vraag: Hoe moet de verdeling van meettijden voor de achtergrondmeting en voor de meting van signaal + achtergrond worden gekozen, opdat de fout in het S-teltempo zo klein mogelijk is.

Stel de S+A-meettijd: pT, het aantal tellen: N_{S+A} en het teltempo: n_{S+A},
dan is de A-meettijd: (1-p)T, het aantal tellen: N_A en het teltempo: n_A
zodat: $n_S = n_{S+A} - n_A$.
De kansdichtheidsfuncties van n_{S+A} en n_A zijn Poissonverdelingen. We kennen echter de verwachtingswaarden z_{S+A} en z_A niet. De beste afschatting die we kunnen maken gaat uit van het actuele teltempo:

$$s_{S+A} = \sqrt{N_{S+A}} \quad \text{en:} \quad s_A = \sqrt{N_A} \tag{17}$$

Nu geldt:

$$n_S = \frac{N_{S+A}}{T_{S+A}} - \frac{N_A}{T_A} \quad \text{dus:} \quad n_S = f(N_{S+A}, N_A) \tag{18}$$

Dus:

$$\begin{aligned} s_S^2 = s_{n_s}^2 &= \left(\frac{\partial n_S}{\partial N_{S+A}}\right)^2 \cdot s_{N_{S+A}}^2 + \left(\frac{\partial n_S}{\partial N_A}\right)^2 \cdot s_{N_A}^2 = \\ &\left(\frac{1}{T_{S+A}}\right)^2 \cdot N_{S+A} + \left(\frac{1}{T_A}\right)^2 \cdot N_A = \frac{n_{S+A}}{T_{S+A}} + \frac{n_A}{T_A} = \\ &\frac{n_S + n_A}{pT} + \frac{n_A}{(1-p)T} \end{aligned} \tag{19}$$

en met $SN = n_S/n_A$: de signaal-ruis (signaal-achtergrond) verhouding:

$$s_S^2 = \frac{n_A}{T}\left[\frac{SN+1}{p} + \frac{1}{1-p}\right] \tag{20}$$

s_S is minimaal als de afgeleide naar p gelijk is aan nul. Dat is zo als

$$p = \frac{1 + SN - \sqrt{1+SN}}{SN} \tag{21}$$

Voorbeelden:

als *SN*:	0,01	0,1	1	10	100
dan is *p*:	0,50	0,51	0,59	0,76	0,90

Ga zelf na wat hier de consequenties van zijn.

Bijlage 6.C Kleinste kwadraten fit

6.C.1 Algemeen

Een kleinste kwadraten fit houdt in dat een serie meetwaarden $\{x,y\}$ "nagebootst" wordt op grond van een model. We gebruiken dezelfde x-waarden als bij de meting en rekenen dan steeds een y-waarde uit, dit geeft de serie $\{x,y_r\}$. We proberen de berekende waarden zo goed mogelijk te laten aansluiten bij de gemeten waarden door de parameter(s) van het model te variëren. Als beste fit gebruiken we het criterium dat de residuele kwadratensom minimaal is.

$$\sum(y - y_r)^2 = \text{minimaal}$$

Deze werkwijze heeft een statistische achtergrond en houdt al twee dingen in:

1. De onnauwkeurigheid in de x-waarden is verwaarloosbaar.
2. De onnauwkeurigheid in de gemeten y-waarden is random en voor alle punten in principe even groot.

Als de beste passende parameters van het model bepaald zijn, volgt de onnauwkeurigheid in de parameters (onder andere) uit de spreiding van de meetwaarden rond de best passende berekende fit. Het is de bedoeling om die onnauwkeurigheid zo klein als mogelijk te houden. Hieruit volgt een derde ding:

3. De y-waarden die als meetwaarden worden aangeboden in een kleinste kwadraten berekening moeten niet behept worden met onnodige toevallige of systematische fouten. Het heeft de voorkeur om de daadwerkelijk gemeten waarden te gebruiken als y-waarden in de berekening.

Punt 1. Dit sluit aan bij de gewoonte om de onafhankelijke variabele x te noemen en op de x-as uit te zetten en de afhankelijke variabele op de y-as. Het model gebruikt de x-waarden van de meting. Het is van belang om de x-waarden nauwkeurig te meten, omdat de statistische spreiding aan de y-waarden wordt toegeschreven.

Punt 2. De statistiek achter de kleinste kwadraten fit gaat ervan uit van de spreiding in de y-waarden random is ten opzichte van hun werkelijke waarde. Deze spreiding moet in principe voor alle punten even groot zijn. Dit laatste is lang niet altijd het geval. Bij radioactieve metingen is de statistische onnauwkeurigheid in een meetwaarde ongeveer de wortel van die meetwaarde. Ook bij het lineariseren van verbanden treedt vrijwel altijd een onevenredige effect op ten aanzien van de nauwkeurigheid van de nieuw berekende y-waarden. Als hier geen rekening mee gehouden wordt, is de uitkomst van een kleinste kwadraten fit al snel twijfelachtig. Als de y-waarden een systematische afwijking (kunnen) hebben, levert een kleinste kwadraten berekening meestal geen zinvol resultaat. Een uitzondering vormt de situatie waarbij een systematische afwijking bewust ingecalculeerd wordt en achteraf bepaald kan worden uit een van de parameters.

Punt 3. Af en toe heeft men de neiging om eerst berekeningen uit te voeren met de gemeten waarde alvorens tot de y-waarde te komen waarmee een kleinste kwadraten berekening wordt gedaan. Men wil er nog wat bij optellen of ergens door delen of eerst een andere berekening mee uitvoeren. Een reden kan zijn dat de gemeten grootheid niet dezelfde is als de achterliggende fysische grootheid. Een andere reden om eerst een berekening uit te voeren, is de wens om te lineariseren. Men wil een grafiek zien waarbij x en y een lineair verband hebben. Veel voorkomende berekeningen zijn worteltrekken, kwadrateren en logaritme nemen. Soms zijn

de berekeningen complex, bijvoorbeeld bij de zogenaamde Guggenheim methode. Berekeningen hebben als nadeel dat hiermee nieuwe onnauwkeurigheden binnensluipen en dat de uiteindelijke y-waarden niet meer in principe dezelfde onnauwkeurigheid hebben.

De vraag "Hoe goed is mijn fit" kan het best beantwoord worden aan de hand van het overzicht van de residuen. De residuen zouden normaal verdeeld moeten zijn. De grafiek van de residuen als functie van x zou rond de nul moeten schommelen met af en toe een piekje. En het histogram van de residuen zou op een normale verdeling moeten lijken.

We bespreken drie methoden om de kleinste kwadraten fit toe te passen.
I. De best passende rechte lijn.
II. De inversiemethode en IIa De inversie methode met gewichten.
III. De rechtstreekse methode

6.C.2 I. Best passende rechte lijn

De meeste kleinste kwadraten programmaatjes fitten een rechte lijn door de meetpunten volgens

$$y = Ax + B$$

en geven waarden voor de parameters A en B. Onontbeerlijk is hierbij een berekening van de onnauwkeurigheid in A en B.
Voor het correct toepassen van de kleinste kwadratenfit zijn enkele extra's van het programma noodzakelijk:

- De mogelijkheid om de lijn door (0,0) te laten gaan;
- De mogelijkheid om de waarde van de helling A voor te schrijven;
- De mogelijkheid om gewichten aan de y-waarden toe te kennen.

De eerste twee punten spreken voor zich. Het derde punt is van belang wanneer de y-waarden in principe een niet-gelijke spreiding hebben. Dit doet zich bijvoorbeeld voor bij het lineariseren van verbanden. De gebruikte y-waarde in de kleinste kwadraten fit is dan berekend vanuit een meetwaarde. Als gewicht van een meetpunt wordt gewoonlijk de reciproque van de mogelijke fout in y genomen.

6.C.3 II. Inversiemethode

De inversiemethode is een veralgemenisering van wat er bij de best-passende-rechte-lijn methode gedaan wordt.
We hebben een serie van n metingen van een grootheid y bij verschillende waarden van x. We beschouwen x als onafhankelijke variabele en y als afhankelijke. De meetwaarden y hebben een toevallige fout. De onnauwkeurigheid in x is verwaarloosbaar.
We modelleren de y-waarden met een lineaire combinatie van een aantal functies van x. Laat zeggen twee functies $f(x)$ en $g(x)$ plus een mogelijke constante. De functies f en g mogen best wel ingewikkeld zijn, maar dat hoeft niet, $f(x) = x$ en $g(x) = x^2$. zouden ook heel goed kunnen.
De y-waarden van het model zullen we y_r noemen.

```
a + b*f(x1) + c*g(x1) = yr1          gemeten y1
a + b*f(x2) + c*g(x2) = yr2          gemeten y2
a + b*f(x3) + c*g(x3) = yr3          gemeten y3

a + b*f(xn) + c*g(xn) = yrn          gemeten yn
```

We kunnen dit ook als matrices schrijven.

$$\text{Model:} \quad \begin{pmatrix} 1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & f(x_2) & g(x_2) \\ .. & ... & ... \\ 1 & f(x_n) & g(x_n) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yr_1 \\ yr_2 \\ .. \\ yr_n \end{pmatrix} \qquad \text{Gemeten:} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

De matrices en vectoren kunnen we ook symbolisch samenvatten.

$$\text{Model:} \quad \mathbf{G} \times \mathbf{m} = \mathbf{y_r} \qquad \text{Gemeten:} \quad \mathbf{y}$$

De parameters *a, b* en *c* zitten dus in de vector **m**. We hebben veel meer meetpunten dan het aantal parameters en we rekenen de "best passende" parameters volgens het criterium van de kleinste residuele kwadratensom terug uit de meetwaarden.
Onder residu verstaan we het verschil tussen de gemeten *y* en de y_r-waarde volgens het rekenmodel. Deze residuen worden gekwadrateerd en opgeteld en geven de residuele kwadratensom *E*. Afhankelijk van de keuze van de parameters zal de residuele kwadratensom variëren. Om *E* te minimaliseren moet de partiële afgeleide van *E* naar elk van de afzondelijke parameters nul gesteld worden. Dit geeft een stelsel waaruit de parameters *a, b* en *c* opgelost kunnen worden. De oplossing is als volgt:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \times \mathbf{G})^{-1} \times (\mathbf{G}^T \times \mathbf{y})$$

De bepaling van **m** is bijvoorbeeld in Matlab eenvoudig uit te voeren.

Met behulp van **m** kunnen we de best passende berekende *y*-waarden uitrekenen. En daarmee de residuen en de geminimaliseerde residuele kwadratensom E_{min}.

$$\mathbf{y_r} = \mathbf{G} \times \mathbf{m}$$

$$\mathbf{res} = \mathbf{y} - \mathbf{y_r}$$

$$E_{min} = \mathbf{res}^T \times \mathbf{res}$$

De variantie in elk van de parameters die in **m** zitten, wordt gegeven door de diagonaalelementen van de covariantie-matrix:

$$\text{cov}(\mathbf{m}) = \frac{E_{min}}{(n-p)} (\mathbf{G}^T \times \mathbf{G})^{-1}$$

Hierbij is *n* het aantal meetpunten en *p* het aantal modelparameters.
In het geval van drie modelparameters *a, b* en *c* zal cov(**m**) een 3 bij 3 matrix zijn.

De standaardfout in elk van de drie parameters is dus gelijk aan de wortel van elk van de diagonaalelementen van cov(**m**).
De bepaling van de covariantie-matrix is in Matlab evenmin een probleem.

De naam inversie wordt gebruikt omdat we de vector **m** met de best passende parameterwaarden terugrekenen vanuit de gemeten y-waarden.

Het fitten van een rechte lijn is dus niks anders dan het toepassen van de inversie methode met twee parameters en twee kolommen in de modelmatrix met respectievelijk de waarden 1 en $f(x) = x$.

6.C.4 IIa. De inversiemethode met gewichten

Soms hebben de y-waarden van de meetpunten $\{x_i,y_i\}$, of beter gezegd van de puntenserie $\{x_i,y_i\}$ die we in de kleinste kwadraten fit gebruiken, in principe een niet-gelijke spreiding. In dat geval moeten we een gewichtsfactor toekennen aan de individuele meetpunten. Gebruikelijk is om de reciproque van de mogelijke fout in y_i als gewichtfactor w_i van dat "meet"punt te nemen.

Dit geeft de vector met gewichtsfactoren $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ .. \\ w_n \end{pmatrix}$

Vanuit w construeren we de matrix **W** met alleen diagonaalelementen; de waarden zijn die van de vector **w**.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_n \end{pmatrix}$$

Het vinden van de modelparameters gaat nu als volgt:

$$\mathbf{m} = (\mathbf{G}^\mathbf{T} \times \mathbf{W} \times \mathbf{G})^{-1} \times (\mathbf{G}^\mathbf{T} \times \mathbf{W} \times \mathbf{y})$$

Hiermee worden de modelwaarden berekend. En daarmee de residuen en de geminimaliseerde gewogen residuele kwadratensom.

$$\mathbf{y_r} = \mathbf{G} \times \mathbf{m}$$

$$\mathbf{res} = \mathbf{y} - \mathbf{y_r}$$

$$E_{min} = \mathbf{res}^\mathbf{T} \times \mathbf{W} \times \mathbf{res}$$

De variantie in elk van de parameters die in **m** zitten, wordt gegeven door de diagonaalelementen van de covariantie-matrix. In dit geval:

$$\mathrm{cov}(\mathbf{m}) = \frac{E_{\min}}{(n-p)} (\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{W} \times \mathbf{G})^{-1}$$

De standaardfout in de modelparameters is gelijk aan de wortel van elk van de diagonaalelementen van $\mathrm{cov}(\mathbf{m})$.

6.C.5 III. De rechtstreekse methode

Hiervoor is een grafisch interface handig. De parameters in het model worden achter zogenaamde schuifjes geplaatst. Door te schuiven kan de beste overeenstemming tussen model en metingen gezocht worden. De residuen kunnen rechtstreeks in beeld gebracht worden en de residuele kwadratensom verschijnt in een venstertje. Al schuivend kan die geminimaliseerd worden.
Op een rechtstreekse manier wordt dus de beste waarde van de parameters bepaald.

Het is wel van belang om kritisch te zijn dat inderdaad het echte minimum bereikt wordt in plaats van een subminimum.

Het voordeel van de rechtstreekse methode is dat het erg visueel is en dat de gemeten waarden direct als y-waarden kunnen fungeren zonder de noodzaak van linearisering. Maar nog belangrijker is de mogelijkheid om complexere functies te fitten, het model hoeft niet perse als een lineaire combinatie van functies te zijn zoals bij de inversie methode.

Als nadeel wordt vaak genoemd dat de methode geen schatting van de onnauwkeurigheid in de parameters zou kunnen leveren. Met een kleine toevoeging kan aan dit bezwaar tegemoet worden gekomen: we reconstrueren de covariantie matrix experimenteel.
Hiertoe hebben we een analytische uitdrukking nodig voor de afhankelijkheid van de residuele kwadratensom E als functie van de parameters a, b en c in de buurt van het minimum van E. (We gaan hierbij uit van een model met drie parameters; een model met één parameter of twee parameters werkt analoog.) Theoretisch geldt dat E is te schrijven als een kwadratische functie van a, b en c.
Deze afhankelijkheid is betrekkelijk eenvoudig met een routine op te sporen.

Uit deze afhankelijkheid construeren we de volgende matrix

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial m^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial a \partial c} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial b \partial a} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial b \partial c} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial c \partial a} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial c \partial b} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial c^2} \end{pmatrix}$$

Deze matrix **vervult dezelfde rol als** $(\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{G})$ in het voorgaande deel over de inversie methode. De co**variantie matrix wordt dus nu** gevonden uit de geïnverteerde hiervan:

$$\mathrm{cov}(\mathbf{m}) = \frac{E_{\min}}{(n-p)} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial m^2}\right)^{-1}$$

De betekenis van $\mathbf{m}$ en cov($\mathbf{m}$) is dezelfde als bij de inversie methode.

Bijlage 6.D Afleiding KOW

KOW staat voor kwadrateren – optellen – worteltrekken, de manier waarop de doorwerking van statistische fouten berekend wordt. In deze paragraaf leiden we deze rekenformule af.
We beschouwen het geval dat de grootheid z berekend wordt uit de bekende grootheden x en y. En we schrijven z als functie van x en y:

$$z = z(x,y)$$

De functie kan van alles zijn: optellen, vermenigvuldigen, ingewikkeld verband, etc.

Als eerste kiezen we een waarde van x en een waarde van y waarmee we de bijbehorende z berekenen; we geven deze waarden de index 0.

$$z_0 = z(x_0,y_0)$$

Deze waarden vormen het uitgangspunt van de verdere redenering.
Als tweede stap schrijven we de totale differentiaal in het algemeen op:

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

En passen dit toe voor de waarden x_i, y_i in de buurt van de uitgangssituatie x_0, y_0. We zouden de bijbehorende waarde van z_i met het functievoorschrift kunnen uitrekenen, maar we gebruiken de uitdrukking voor de differentiaal.
De differentialen dx en dy krijgen dan als concrete betekenis de afwijking ten opzichte van respectievelijk x_0 en y_0.

$$\mathrm{d}x = (x_i - x_0)$$
$$\mathrm{d}y = (y_i - y_0)$$

En de waarde van de partiële afgeleiden moeten berekend worden met x_0 en y_0. De uitkomst dz geeft aan de afwijking van de nieuwe waarde z_i ten opzichte van z_0.

$$(z_i - z_0) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0;y=y_0} \cdot (x_i - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=x_0;y=y_0} \cdot (y_i - y_0)$$

Tot dusver niets bijzonders: voor een iets afwijkende waarde van x en een iets afwijkende waarde van y krijg je een iets andere waarde voor z. We rekenen die waarde uit via een lineaire benadering van het functievoorschrift.

Maar dan: stap drie. We gaan links en rechts kwadrateren.

$$(z_i - z_0)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 (x_i - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(x_i - x_0)(y_i - y_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 (y_i - y_0)^2$$

De partiële afgeleiden moeten berekend worden met x_0 en y_0.

Stap vier is dat we het voorgaande in gedachten heel vaak gaan herhalen met waarden x_i, y_i die random spreiden rond x_0 en y_0. We schrijven elke keer de gekwadrateerde uitdrukking op. En als we dit n maal gedaan hebben gaan we sommeren:

$$\sum (z_i - z_0)^2 = \sum \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 (x_i - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)(x_i - x_0)(y_i - y_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 (y_i - y_0)^2 \right]$$

We kunnen het rechterdeel splitsen en we mogen de partiële afgeleiden als constante factor naar voren halen:

$$\sum (z_i - z_0)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \sum (x_i - x_0)^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)\sum (x_i - x_0)(y_i - y_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \sum (y_i - y_0)^2$$

De vijfde stap is de constatering dat de middelste term in het rechterlid nul is. Dat heeft een statistische achtergrond. Als de waarden x_i en y_i onafhankelijk van elkaar random gekozen worden rond x_0 en y_0 dan komt het product $(x_i - x_0)(y_i - y_0)$ gemiddeld op 0.

Als laatste stap delen we door n en passen de definities van standaardafwijking toe.

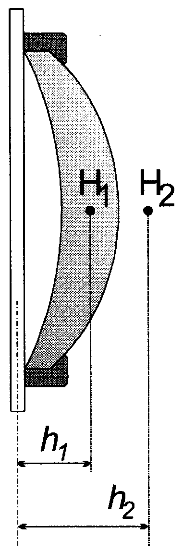
$$\frac{1}{n}\sum (z_i - z_0)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{n}\sum (x_i - x_0)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{n}\sum (y_i - y_0)^2$$

$$s_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 s_y^2$$

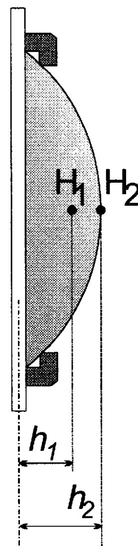
En zo zijn we verrassend snel op de KOW formule uitgekomen.

Bijlage 11 Beschikbare lenzen

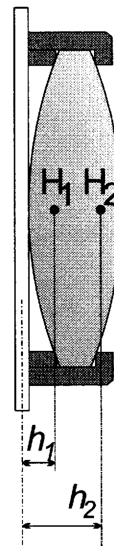
Lens	Type	F [mm]	R1 [mm]	R2 [mm]	D [mm]	Lenscode Melles Griot	Positie hoofdvlak [mm+/-0,5]
C	Meniscus	100	-92,58	- 34,49	10,3	01 LMP 003	$h_1 = 14{,}1$ $h_2 = 18{,}0$
D	Symm. Convex	100	103,73	-103,73	8,2	01 LDX 171	$h_1 = 4{,}0$ $h_2 = 6{,}8$
E	Plano convex	100	∞	- 52,02	9,9	01 LPX 181	$h_1 = 7{,}0$ $h_2 = 10{,}3$
F	Plano convex	50	∞	- 26,49	11,3	01 LPX 111	$h_1 = 8{,}9$ $h_2 = 12{,}8$
G	Symm. Convex	50	49,4	- 49,4	16,8	01 LDX 115	$h_1 = 7{,}1$ $h_2 = 12{,}1$
H	Plano convex	200	∞			01 LPX 277	



C



E, F



D, G